

Delrapport
for TEFT-prosjektet
TEMPERATURKALIBRATOR

Utarbeidet av
Finn Haugen
1. amanuensis
Høgskolen i Telemark
Avdeling for teknologiske fag
3914 Porsgrunn
E-mail: Finn.Haugen@hit.no

15. februar 1997

Innhold

1	Innledning	6
2	Eksperimentoppsett	8
3	Regulatorinnstilling i forskjellige arbeidspunkter	9
4	Vurdering av regulatoralgoritmer	14
4.1	To diskrete PID-regulatoralgoritmer	14
4.2	Valg av regulatoralgoritme	16
4.3	Betydningen av lavpassfilter i serie med derivatleddet	16
4.4	Betydningen av samplingsintervallet T	17
4.5	Betydningen av regulatorparametrenes verdier	18
5	Adaptiv (parameterstyrt) regulering	20
5.1	Hvorfor adaptiv regulering?	20
5.2	Parameterstyring av K_p	21
5.3	Parameterstyring av T_i , T_d og T_f	22
5.4	Responser med den adaptive regulatoren	23
6	Rampeformet settpunkt	24
7	Frekvensresponsanalyse	29
8	En raskere kalibrator?	32
9	Konklusjoner	32
10	Anbefalinger	33
A	Matlab-program	34
B	Regulatoralgoritme og -parametre for PID-IT	38

Sammendrag

Rapporten gjelder den del av TEFT-prosjektet *Temperaturkalibrator* som er knyttet til reguleringstekniske problemstillinger.

Målsetningene for delprosjektet har vært å optimalisere regulatorfunksjonen i temperaturreguleringssystemet i den foreliggende kalibratoren (TC650) og å beregne det maksimale stigningstallet for et rampeformet temperatursettpunkt (temperaturreferanse) gitt at det stasjonære reguleringsavviket skal være maksimalt $0,5\text{ }^{\circ}\text{C}$.

De viktigste resultatene er som følger:

- Det er funnet gode regulatorparametre i en rekke arbeidspunkter for en (tidsdiskret) PID-regulator vha. relésvingninger kombinert med Ziegler-Nichols' lukket-sløyfe-metode.
- En forbedret regulatorfunksjon er beskrevet og demonstrert. Den er basert på at P-, I- og D-leddene er diskretisert hver for seg og summert til slutt. Den inneholder videre et (diskret) lavpassfilter i serie med regulatorens derivatledd, hvilket gir en kraftig reduksjon av høyfrekvent støy i derivatleddet.
- Prosessdynamikken varierer med arbeidspunktet. Reguleringen blir bedre (raskere) med adaptiv regulering sammenliknet med bruk av en regulator med faste parametre. Det er utledet en adaptiv regulator basert på parameterstyring: Beregning av K_p som funksjon av pådraget og beregning av T_i , T_d og T_f som funksjoner av temperaturmålingen.
- Regulatorparametrene benyttet i dagens kalibrator gir unødig treg regulering (på kalibratoren benyttet i prosjektet). Regulatorforsterkningen er unødig lav i alle arbeidspunkter, og integraltiden synes å være beregnet feilaktig (for stor) i flere arbeidspunkter.
- Det er utledet en formel for sammenhengen mellom settpunkt-rampens stigningstall K_r og det stasjonære reguleringsavviket e_s . Ut fra formelen kan man beregne den maksimale K_r som gir et spesifisert maksimalt stasjonært reguleringsavvik. Spesielt fås $e_s < 0,5\text{ }^{\circ}\text{C}$ med $K_r < 0,54\text{ }^{\circ}\text{C}/\text{sek}$.
- Frekvensresponsanalyse av sløyfetransferfunksjonens frekvensrespons, $h_0(\omega)$, viser at reguleringssystemet kan få dårlig stabilitet dersom sløyfeforsterkningen $K_0 = K_p K$ får en redusert verdi. Prosessforsterkningen K er liten i arbeidspunkter svarende til spesielt høye og spesielt lave temperaturer. Det kan altså bli dårlig stabilitet ved regulering omkring slike arbeidspunkter, med mindre det benyttes adaptiv regulering, som vil sikre reguleringssystemet tilfredsstillende stabilitet uansett arbeidspunkt.

Det anbefales at man forbedrer regulatorfunksjonen, både mht. selve algoritmen (diskretisere P-, I- og D-leddet hver for seg, bruke filter i serie med derivatleddet, bruke funksjonsbasert (polynombasert) parameterstyring for å oppnå adaptiv regulering), samt finne mer optimale regulatorparametre i de aktuelle arbeidspunktene.

Forord

Denne rapporten er utarbeidet for TEFT-prosjektet *Temperaturkalibrator* (Tel-Tek-nr. 250116) som er et samarbeid mellom Instrutek Products a.s. i Larvik, Norges Forskningsråd og Tel-Tek/HiT (Høgskolen i Telemark). Rapporten gjelder den del av TEFT-prosjektet som er knyttet til reguleringstekniske problemstillinger. Den delen av TEFT-prosjektet som dreier seg om beregning av temperaturprofilen i blokken i kalibratoren, blir rapportert av prof. Morten Chr. Melaaen ved Høgskolen i Telemark.

Jeg vil takke alle involverte, og spesielt Svein Olsen og Øivind Gundersen ved Instrutek Products, for et godt samarbeid.

Det forutsettes at den som leser rapporten, har god kjennskap til kalibratoren (TC650).

Hilsen

Symbolliste

T	[sek]	Samplingsintervall
t	[sek]	Tid
k	[1]	Tidsskritt eller samplingsintervall nr. ($t = kT$)
K_p	[%/%]	Proporsjonalforsterkning i PID-regulator.
K_{p50}	[%/%]	K_p når måleområdet er på 50 °C
K_{p650}	[%/%]	K_p når måleområdet er på 50 °C
K_{pk}	[%/%]	Kritisk forsterkning (i Ziegler-Nichols' metode)
T_k	[1]	Kritisk periode (i Ziegler-Nichols' metode)
T_i	[sek]	Integraltid i PID-regulator
T_d	[sek]	Derivattid i PID-regulator
T_f	[sek]	Filtertid i PID-regulator
r	[°C] evt. [%]	Temperaturreferanse eller -settpunkt
y	[°C] evt. [%]	Temperatur eller -måling
y_0	[°C] evt. [%]	Temperatur eller -måling i arbeidspunkt
u	[%]	Pådrag (styresignal til triac)
u_p	[%]	Pådragets proporsjonalledd
u_i	[%]	Pådragets integralledd
u_d	[%]	Pådragets derivatledd
u_0	[%]	Pådragsbias (nominelt pådrag) eller pådrag i arbeidspunkt
e	[°C] evt. [%]	Reguleringsavvik: $e=r-y$
e_d	[%]	Modifisert avvik for bruk i derivatleddet: $e_d = \beta r - y$
e_{df}	[%]	Filtret e_d
e_s	[%]	Stasjonært reguleringsavvik, $e(t = \infty)$
E	[%]	Amplituden av reguleringsavviket (ved relétuning)
M	[%]	Relégrense (ved relétuning)
α	[1]	Forholdet mellom T_f og T_d i en derivatleddet
β	[1]	Vektfaktoren for settpunktet r i derivatleddet
ω_b	[rad/s]	Filter-båndbredde
f_b	[Hz]	Filter-båndbredde
K_r	[°C/s]	Stigningstall for rampeformet settpunkt, $r(t) = K_r t$
K_0	[%/%]	Sløyfeforsterkning
K_{pg}	[°C/%]	Omregningsfaktor fra °C til %
K	[%/%]	Prosessforsterkning (fra u i % til y i %)
K_1	[°C/%]	Stigningstallet $d(y_0)/d(u_0)$ på arbeidspunktkurven $y = f(u_0)$
T_{iz}	[sek]	Innstillingstid (for $t > T_{iz}$ er sprangresponsen innenfor $\pm z$ omkring settpkt.)
$h_r(z)$		Regulatorens z -transferfunksjon
$h_p(z)$		Prosessens z -transferfunksjon
$h_0(z)$		Sløyfetransferfunksjonen, $h_0(z) = h_r(z)h_p(z)$
φ	[grader]	Fasemargin
ΔK	[dB]	Forsterkningsmargin
ω_c	[rad/s]	Båndbredde
PID-IT		PID-regulator benyttet av Instrutek i nåværende kalibrator
PID-P		PID-regulator benyttet i prosjektet

1 Innledning

Målsetninger. Det er arbeidet ut fra følgende målsetninger med delprosjektet:

1. Å optimalisere temperaturreguleringssystemet i den foreliggende kalibratoren, som er av typen TC650, gitt at regulatoren skal være en standardregulator (PID) og at det ikke skal gjøres endringer av konstruksjonen. Med optimalisering menes
 - (a) valg av “optimal” PID-algoritme, samt
 - (b) beregning av optimale regulatorparametre.
2. Å beregne det maksimale stigningstallet for et rampeformet temperatursettpunkt (temperaturreferanse) gitt at det stasjonære reguleringsavviket skal være maksimalt $0,5\text{ }^{\circ}\text{C}$.

Metodevalg og framgangsmåte. (Punktene referer til punktene ovenfor.)

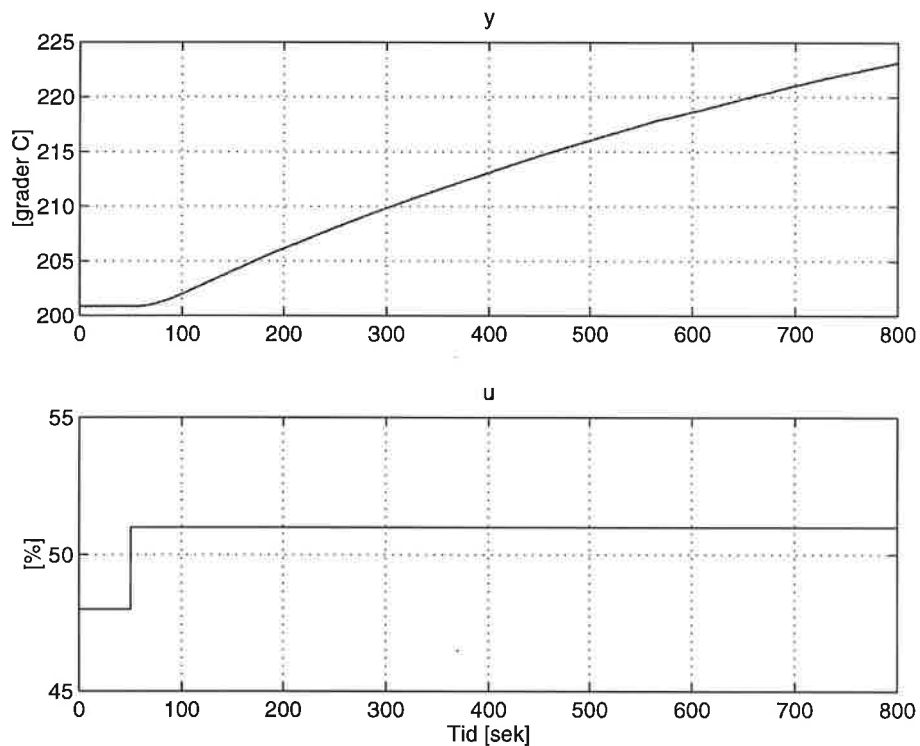
1. (a) Det er tatt utgangspunkt i en konvensjonell tidskontinuerlig PID-regulatorfunksjon på såkalt parallellform. Denne er så diskretisert for å finne en PID-algoritme for implementering i en datamaskin. Selve fremgangsmåten ved diskretisering har imidlertid betydning for algoritmens egenskaper. Av to vanlige fremgangsmåter, er det vist at den ene er å foretrekke ved bruk i kalibratoren. Det er videre sett på betydningen av å ha filter i serie med regulatorens derivatledd. Det er også vist hvordan PID-algoritmen kan gjøres adaptiv slik at den ytelse blir optimal i et hvert arbeidspunkt.

(b) Regulatorinnstillinger

er utført på basis av eksperimentelle relésvingninger kombinert med Ziegler-Nichols’ lukket-sløyfe-metode [1].

Generelt kan det tenkes at man kan finne en bedre regulatorinnstilling ut fra en matematisk modell av prosessen. Det er fordi en modell *kan* gi mer informasjon (over et bredere frekvensområde) om prosessens egenskaper enn hva enkle eksperimenter kan gi, selvsagt forutsatt at modellen er nøyaktig. Det ble gjort forsøk på modellbasert regulatorinnstilling. Det ble utarbeidet en (egentlig flere) transferfunksjonsmodell(er) for kalibratoren med pådraget eller styresignalet til triacen som inngangsvariabel og temperaturmålingen som utgangsvariabel. Transferfunksjonen(e) ble estimert vha. funksjoner i Matlabs System Identification Toolbox på basis av tidsserier av pådraget og temperaturmålingen. Jeg klarte ikke å oppnå noen forbedring av regulatorens ytelse (raskere regulering) ved å bruke en slik modell som grunnlag for frekvensresponsbasert regulatorinnstilling (der fasemarginen ble spesifisert), snarere tvert imot. Dette kan tilskrives modellfeil. Men det har

også med kalibratorens prosesskarakteristikk å gjøre: Kalibratorens dynamiske egenskaper kan karakteriseres som (grovt sett) “stor tidskonstant med dødtid” (stor tidskonstant i forhold til dødtiden) eller, med andre ord, tilnærmet en integrator med dødtid. Denne typen prosessdynamikk fremgår av figur 1 som viser responsen i temperaturen y etter et (lite) sprang i pådraget $u(t)$. Det er min erfaring



Figur 1: Responsen i temperaturen y etter et sprang i pådraget u . Responsen viser at prosessen er av typen “stor tidskonstant med dødtid” eller tilnærmet “integrator med dødtid”.

med prosesser med liknende dynamikk at metoden med relésvingninger kombinert med Ziegler-Nichols’ lukket-sløyfe-metode gir “optimale” regulatorparametre i betydningen rask regulering og tilfredsstillende stabilitet.

Konklusjonen er at det er trygt å benytte *eksperimentelle* relésvingninger kombinert med Ziegler-Nichols’ lukket-sløyfe-metode for denne prosessen.

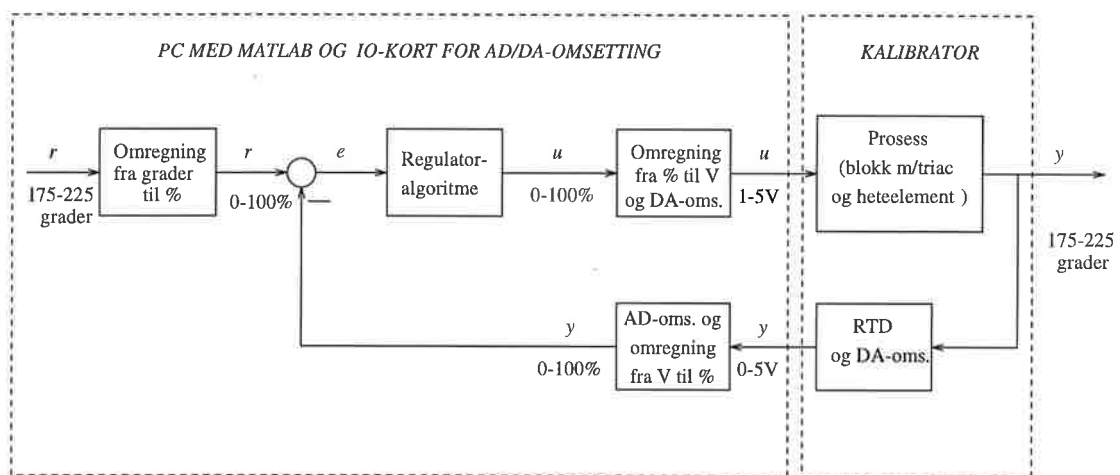
2. Det er utledet en formel for sammenhengen mellom et rampeformet settpunkts stigningstall og det stasjonære reguleringsavviket. Dette er gjort med basis i systemteori for reguleringsystemer. Formelen er bekreftet gjennom eksperimenter på kalibratoren.

Alle teoretiske resultater i rapporten er bekreftet av eksperimenter utført på kalibratoren (virkelige responser er presentert i rapporten).

2 Eksperimentoppsett

Det gis her ingen dokumentasjon av selve kalibratoren TC650.

Figur 2 viser et komponent-blokkdiagram av reguleringsystemet.



Figur 2: Blokkdiagram av reguleringsystemet.

I alle eksperimentene har et eksternt termoelement vært plassert i brønnen for å gjøre de termiske forholdene mest mulig realistiske.

Den aktive styringen av vifhastigheten (fra mikrokontrolleren i kalibratoren) har vært koplet ut, slik at viften har gått med konstant turtall.

Eksperimentene har vært utført ved romtemperatur (rundt 20 °C).

Alle programmer er skrevet som m-filer i Matlab. Vedlegg A viser som eksempel programmet som genererer figur 14. Programmet implementerer en adaptiv PID-regulator. Alle andre programmer som er benyttet for regulering, er bare små modifikasjoner av dette programmet.

Via IO-kortet PCL812 som er montert i PCen, kan Matlab lese inn til sitt arbeidsområde et spenningsignal, y , som representerer temperaturen målt med RTD-elementet¹ i kalibratoren. I eksperimentoppsettet fås dette spenningssignalet fra DA-omsetteren på elektronikk-kortet i kalibratoren. Mikrokontrolleren i kalibratoren overfører dataordet som RTD-elementets tilhørende AD-omsetter

¹RTD = Resistive Temperature Detector = termoelement

gir ut, til nevnte DA-omsetter. Denne DA-omsetteren er i eksperimentoppsettet frigjort til denne bruk. Normalt brukes DA-omsetteren til omsetting av styresignalet til triacen, men triacen får i eksperimentoppsettet sin styrespenning fra IO-kortet i PCen i stedet (jf. beskrivelsen nedenfor). Via programmet SC200, som er installert på PCen, kunne jeg velge det temperaturområdet som skal svare til innlest spenningsområde på 0–5V. I de fleste eksperimentene har jeg benyttet måleområdet 175–225 °C, som indikert i figur 2.

Via IO-kortet i PCen kan Matlab også skrive ut et spenningssignal, u , som styrer triacen som leverer effekt til heteelementene. y leses inn vha. funksjonen `inn42`, som er en såkalt dll-fil som er et kompilert C-program som driver IO-kortet. Programmet er kompilert (ihht. Matlabs krav) slik at `inn42.dll` blir en funksjon som kan kalles som en hvilken som helst annen funksjon i Matlab. Tilsvarende gjelder for `ut42`. `inn42` og `ut42` kan aksessere alle analoge inn- og utganger på IO-kortet. `inn42` og `ut42` er utviklet ved Høgskolen i Telemark. Bruken av `inn42` og `ut42` fremgår av programmet vist i vedlegg A. (`diginn42` og `digut42` kan brukes for digital IO med PCL812-kortet.)

IO-kortet (PCL812) er konfigurert med default-verdier, bl.a. med spenningsområde 0–5V både for AD- og DA-omsetteren.

Samplingsintervallet er $T = 0,223$ sek. som er den nærmest mulige verdien til 0,2 sek. som er den verdien som er benyttet i den nåværende kommersielle kalibratoren. Slik samplingsintervallet, T , er realisert i Matlab-programmet, jf. vedlegg A, er nemlig minste oppløsning på T ca. 0,055 sek. Det er fordi T er realisert vha. Matlab-funksjonen `toc` (som returnerer tiden fra siste `tic`-kall), og `toc` har en oppløsning på ca. 0,055 sek. Betydningen av samplingsintervallets størrelse er drøftet nærmere i kap. 4.4, og konklusjonen der er at regulatorens og dermed reguleringssystemets ytelse er uavhengig av den virkelige verdien av T ihvertfall så lenge T er mindre enn 1 sek. ($T > 1$ sek. er lite aktuelt for kalibratoren).

Matlab med IO mot fysisk system har vist seg å være et meget hensiktsmessig utgangspunkt for analyse, design og eksperimenter.

3 Regulatorinnstilling i forskjellige arbeidspunkter

Det er utført relébasert regulatorinnstilling som beskrevet i kap. 7.4 i [1]. Denne metoden går i korthet ut på å bruke en reléfunksjon eller av/på-regulator for å generere stående svingninger i reguleringssystemet. Amplituden og perioden av disse svingningene blir tilnærmet de samme som ved Ziegler-Nichols' lukket-sløyfe-metode. Kritisk forsterkning K_{pk} og kritisk periode T_k kan finnes fra disse svingningene, og Ziegler-Nichols' formler for PID-parametrene kan benyttes. Innstillingen er utført for et antall arbeidspunkter. Reléhøyden M i pådraget er valgt lik 5%. Tabell 1 viser regulatorparametrene for de enkelte arbeidspunktene. Et arbeidspunkt er representert ved de sammenhørende stasjonære eller statiske ver-

y_0	u_0	K_{pk50}	T_k	K_{p50}	K_{p650}	T_i	T_d	T_f
50	28	20,54	119,7	12,3	160,1	59,8	15,0	1,50
100	39	8,39	106,7	5,04	65,5	53,4	13,3	1,33
200	48	5,93	100,6	3,56	46,3	50,3	12,6	1,26
300	55	4,31	94,8	2,58	33,5	47,4	11,9	1,19
400	63	4,09	86,5	2,45	31,9	43,3	10,8	1,08
500	71	3,71	82,0	2,23	29,0	41,0	10,3	1,03
600	80	4,16	80,3	2,50	32,5	40,2	10,0	1,00
650	88	5,48	74,3	3,29	42,8	37,1	9,3	0,93

Tabell 1: Regulatorparametre for de forskjellige arbeidspunktene. K_{p50} er K_p -verdien svarende til et temperaturmåleområde på 50 grader, mens K_{p650} svarer til et måleområde på 650 grader.

diene av pådraget, u_0 , og temperaturen, y_0 . (u_0 kan benyttes som pådragsbias eller nominelt pådrag i en regulatoralgoritme.)

Merk følgende angående K_p : Jeg har i alle eksperimentene ifm. regulatorinnstillingen benyttet at 0–100% måleområde svarer til 50 °C (f.eks. 175–225 °C når regulatoren skulle innstilles rundt arbeidspunkt svarende til $y_0 = 200$ °C). I den kommersielle TC650 svarer imidlertid 0–100% måleområde til 0–650°C. Generelt gjelder at dersom måleområdet og dermed måleforsterkningen endres, må regulatorforsterkningen endres omvendt proporsjonalt for at reguleringsystemets sløyfeforsterkning skal forbli uendret (slik at stabiliteten i sløyfen ikke påvirkes). Følgende formel regner om fra K_p svarende til et måleområde på 50 grader til K_p svarende til måleområde på 650 grader:

$$K_{p650} = K_{p50} \cdot \frac{650}{50} = K_{p50} \cdot 13 \quad (1)$$

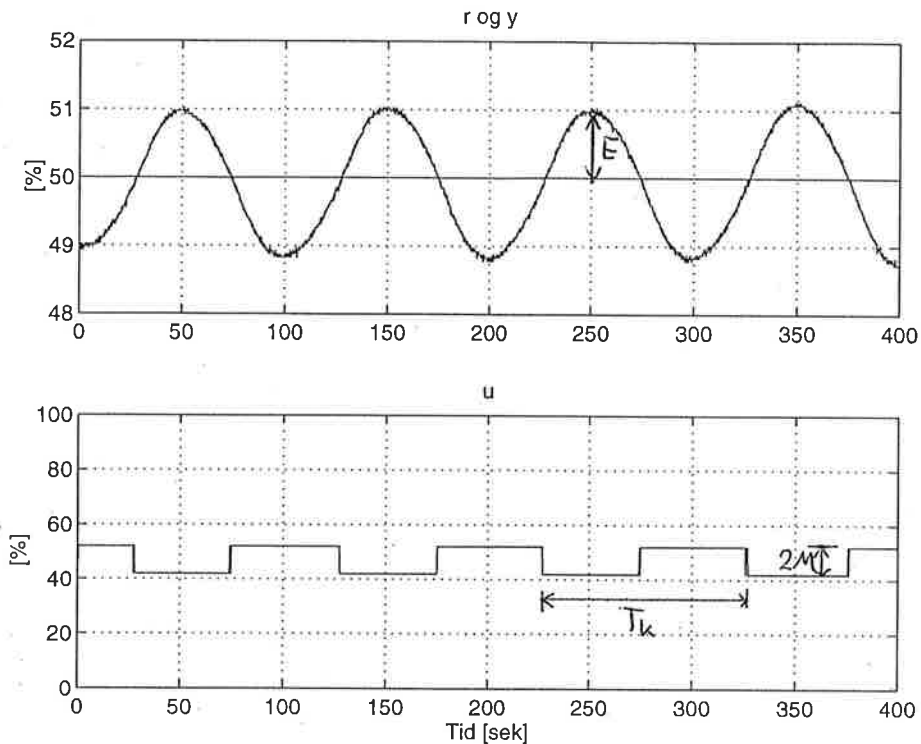
Eksempel på innstilling av regulator. Figur 3 viser $r(t)$ og $y(t)$ og $u(t)$ (alle i prosent) i ett av eksperimentene, svarende til arbeidspunktet $u_0 = 48\%$ og $y_0 = 200$ °C = 50% (måleområdet er 175–225 °C). Fra figur 3 avleses (vha. Matlab-funksjonen `ginput` som returnerer tallverdier til figurpunkter identifisert med aksekors og musetast) at amplituden i y er $E = 1,07\%$ og perioden er $T_k = 100,6$ sek. Det gir, jf. likning (7.43) i [1], $K_{pk} = 1,27 \cdot M/E = 5,93$. K_{pk} og T_k benyttes så i formlene for regulatorparametrene ihht. Ziegler-Nichols' lukket-sløyfe-metode. PID-parametrene blir

$$K_{p50} = 0,6K_{pk} = 3,56 \quad \text{og} \quad K_{p650} = 3,56 \cdot 13 = 46,3 \quad (2)$$

$$T_i = T_k/2 = 50,3 \text{ sek.} \quad (3)$$

og

$$T_d = T_k/8 = 12,6 \text{ sek.} \quad (4)$$



Figur 3: r og y (øverst) og u (nederst) ved relé-regulering. Alle variable er i %.

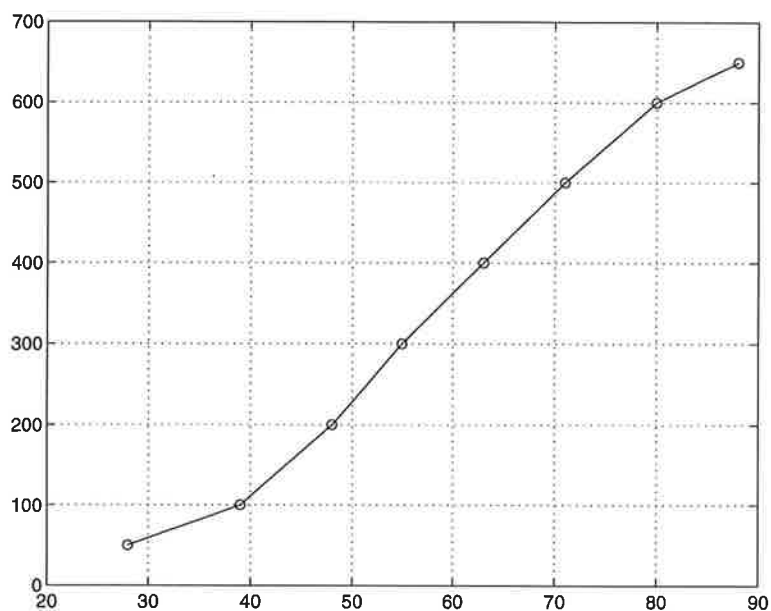
Dessuten settes, som vanlig er,

$$T_f = 0,1 T_d = 1,26 \text{ sek.} \quad (5)$$

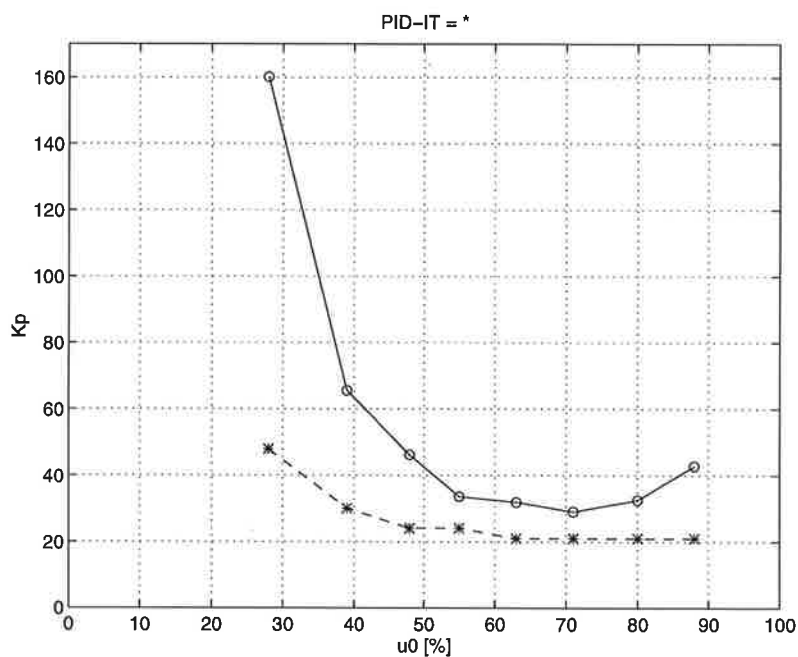
Grafisk fremstilling. Dataene fremstilt i tabell 1 er fremstilt i figurene 4-7. I figurene 5-7 er det også vist regulatorparametrene for PID-IT (dagens PID-regulator benyttet i Instruteks kalibrator). Sistnevnte verdier er hentet fra databladet gjengitt i vedlegg B.

Kommentarer til figurene 4-7:

- K_p er plottet som funksjon av u_0 , mens T_i og T_d er plottet som funksjoner av y_0 . Det er gjort fordi det antas at K_p snarere er en funksjon av pådraget enn av temperaturen i blokken. Det henger sammen med at det er en ulinearitet i effektstyringen (triacen), jf. punktet nedenfor. T_i og T_d derimot er plottet som funksjoner av y_0 . Det er fordi det antas at blokkens dynamiske egenskaper ("tidskonstant, dødtid"), og dermed verdiene av T_i og T_d , avhenger av temperaturen i blokken snarere enn av den tilførte effekt.
- y_0 er en S-formet funksjon av u_0 . Det at y_0 har mindre følsomhet mhp. u_0 (kurven har lavere stigningstall) for små og for store verdier av u_0 , skyldes

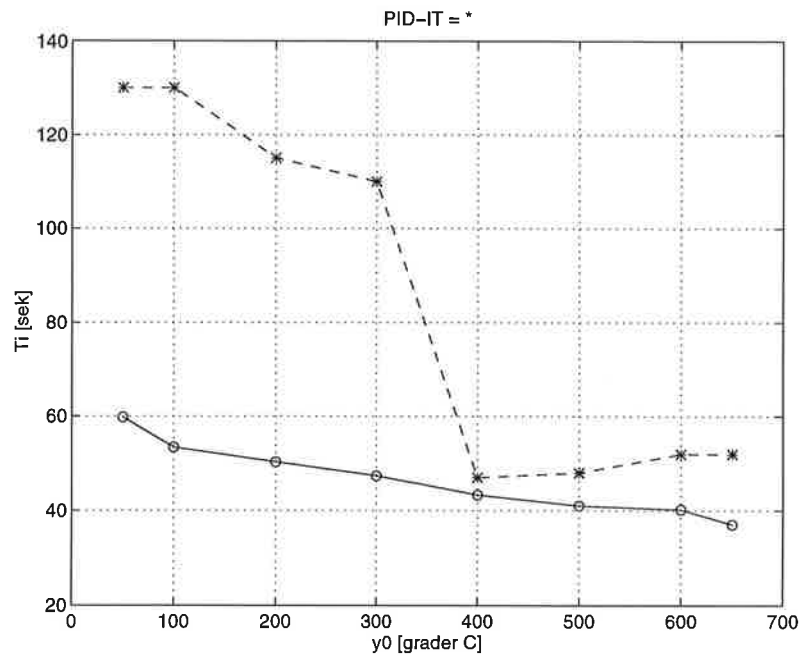


Figur 4: Sammenhørende verdier av arbeidspunktens pådrag u_0 og temperatur y_0 .

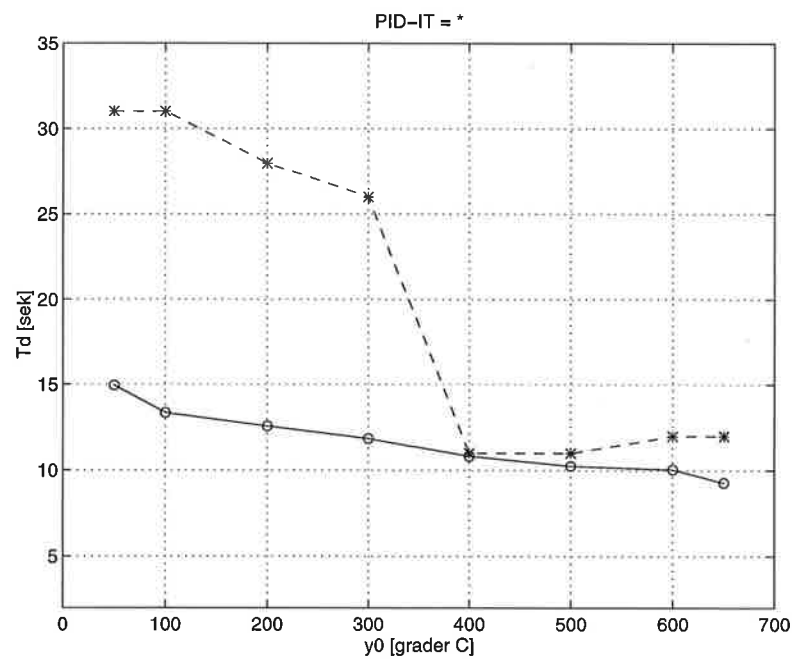


Figur 5: K_p som funksjon av det nominelle pådrag u_0 . Verdiene angitt med "*" er verdiene benyttet i PID-IT.

sannsynligvis triacens virkemåte: Endring av effekt pr. endring av styresignal avtar for små og for store verdier av styresignalet. Dette skulle tilsi at K_p kan tillates å ha større verdier for små og for store verdier av pådraget,



Figur 6: T_i som funksjon av det nominelle pådrag u_0 . Verdiene angitt med "*" er verdiene benyttet i PID-IT.



Figur 7: T_d som funksjon av det nominelle pådrag u_0 . Verdiene angitt med "*" er verdiene benyttet i PID-IT.

og dette kan vi faktisk observere i figur 5.

- Fra figur 5 ser vi at de forskjellige K_p -verdiene i PID-IT er en del mindre

enn hva som er funnet i prosjektet. Dette kan selvsagt tilskrives forskjeller mellom de to eksperimentoppsettene (forskjellig utstyr). Men dersom alle forhold er tilnærmet de samme i de to eksperimentoppsettene, må det forventes at PID-IT gir unødig treg regulering. Dette bekreftes ved å sammenlikne figurene 10 og 11 vist lenger ut i rapporten.

- T_i - (og T_d -) verdiene i PID-IT er markert større for lave verdier av y_0 enn for høye verdier. Det er ingen ting i utstyrets virkemåte som tilsier at parameterverdiene skal endre seg så brått som funksjon av u_0 . T_i - (og T_d -) verdiene funnet i prosjektet er da også en langt jevnere funksjon av y_0 . En mulig forklaring er at den kritiske periode T_k (i Ziegler-Nichols' lukket-sløyfe-metode, som er benyttet ved innstilling av PID-IT), er feilaktig avlest i eksperimentene som er utført ved lave verdier av y_0 . Er det egentlig $2 \cdot T_k$ som er avlest? I så fall skal verdiene for T_i og T_d ved lave y_0 egentlig halveres.
- Dersom regulatoren skal ha faste parametre, bør man velge parameterverdiene slik at stabiliteten er garantert over hele arbeidsområdet. K_p bør gis en "liten" verdi og T_i (og dermed T_d) en "stor" verdi. Ut fra figurene 5–7 foreslås følgende sett av faste regulatorparametre:

$$K_p = 30,0, \quad T_i = 50,0, \quad T_d = 12,5, \quad T_f = 1,25 \quad (6)$$

- Siden alle parametrene, men spesielt K_p , varierer over arbeidsområdet, jf. figurene 5–7, bør adaptiv regulering i form av parameterstyrt regulering (gain scheduling) vurderes. Dette behandles nærmere i kap. 5.

4 Vurdering av regulatoralgoritmer

4.1 To diskrete PID-regulatoralgoritmer

Utgangspunktet for de praktiske tidsdiskrete PID-regulatoralgoritmer som er aktuelle i dette prosjektet, er følgende tidskontinuerlige PID-regulatorfunksjon:

$$u = u_0 + \underbrace{K_p e}_{u_p} + \underbrace{\frac{K_p}{T_i} \int_0^t e \, d\tau}_{u_i} + \underbrace{K_p T_d \dot{e}_{df}}_{u_d} \quad (7)$$

der "f" står for "filtret". e_d er

$$e_d = \beta r - y \quad (8)$$

β angir altså vekten av referansen i derivasjonsleddet. Filteret er gitt ved

$$e_{df}(s) = \frac{1}{T_f s + 1} e_d(s) \quad (9)$$

som er et lavpassfilter med båndbredde $1/T_f$ [rad/s]. u_0 i (7) er det nominelle pådrag eller pådragsbiasen. u_0 kan settes lik null, men det er best (gir minst initielle avvik) å gi u_0 en rimelig verdi. Med $u_0 = 0$, kan prosessen faktisk bli styrt i feil retning til å begynne med. Har man ikke grunner for et annet valg, kan man sette $u_0 = 50\%$. I eksperimentene i dette prosjektet, har jeg benyttet u_0 svarende til det aktuelle arbeidspunkt, f.eks. $u_0 = 48\%$ for arbeidspunktet der $y_0 = 200$ °C, jf. tabell 1.

En *tidsdiskret* regulatoralgoritme kan utvikles ved å diskretisere (7). Eulers bakovermetode for diskretisering er da vanlig å benytte. Diskretiseringen kan utføres på hele (7) under ett, hvilket leder til følgende algoritme, jf. kapittel 14.3.2 i [1],

$$u(k) = u(k-1) + K_p \left(1 + \frac{T}{T_i} \right) e(k) - K_p e(k-1) + \frac{K_p T_d}{T} [e_{df}(k) - 2e_{df}(k-1) + e_{df}(k-2)] \quad (10)$$

En alternativ regulatoralgoritme fås ved å diskretisere hvert ledd i (7) for seg, jf. [1], hvilket gir følgende algoritme:

$$u_p(k) = K_p e(k) \quad (11)$$

$$u_i(k) = u_i(k-1) + \frac{K_p T}{T_i} e(k) \quad (12)$$

$$u_d(k) = \frac{K_p T_d}{T} [e_{df}(k) - e_{df}(k-1)] \quad (13)$$

$$u(k) = u_0 + u_p(k) + u_i(k) + u_d(k) \quad (14)$$

Filteret (9) er i prosjektet diskretisert vha. Tustins metode (trapesmetoden), som er en noe mer nøyaktig diskretiseringsmetode enn Eulers metode, og som gir noe bedre filtrering spesielt for høye frekvenser (større overensstemmelse med det opprinnelige tidskontinuerlige filteret). (Hvorvidt man velger Euler- eller Tustin-diskretisering for de øvrige deler av regulatoralgoritmen, er mindre viktig.) Tustin-diskretisering gir følgende filteralgoritme:

$$e_{df}(k) = \frac{2 - T/T_f}{2 + T/T_f} e_{df}(k-1) + \frac{T/T_f}{2 + T/T_f} [e_d(k) + e_d(k-1)] \quad (15)$$

For regulatoralgoritmen (10) kan integratorbegrensning (anti-wind-up) implementeres ved at $u(k)$ settes lik u_{\max} evt. u_{\min} dersom det viser seg at den (foreløpig) beregnede $u(k)$ er større enn u_{\max} hhv. mindre enn u_{\min} .

For regulatoralgoritmen (11)–(14) er integratorbegrensning (anti-wind-up) implementert ved at $u_i(k)$ settes lik $u_i(k-1)$ —dvs. at integreringen stoppes—dersom det viser seg at den (foreløpig) beregnede $u(k)$ vha. (14) er større enn u_{\max} evt. mindre enn u_{\min} . Dessuten settes da pådraget som settes ut til pådragsorganet, lik u_{\max} evt. u_{\min} .

4.2 Valg av regulatoralgoritme

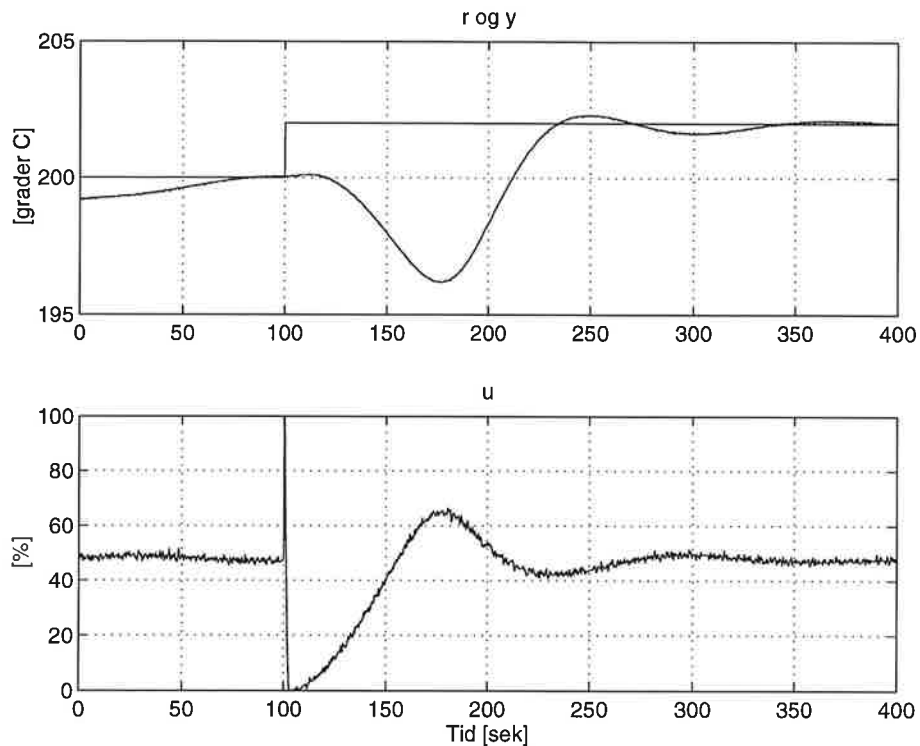
Jeg har valgt å benytte (11)–(14) med $\beta = 1$ (full vekting av settpunktet) i prosjektet, og anbefaler at man går over til å bruke denne algoritmen i kalibratoren. (Denne regulatoralgoritmen vil senere i rapporten referes til som PID-P (PID-prosjekt).) Begrunnelsen for valget av (14) er knyttet til den måten derivatleddet behandler settpunktet r på: Jeg forutsetter at det er ønskelig med best mulig følging av alle typer settpunkter, men det er sprang og rampe som er mest aktuelt for kalibratoren. Spesielt er det ønskelig med nøyaktig følging av rampeformet settpunkt (ifm. kalibrering av termostater). Dette tilsier at settpunktet bør gis full vekt i derivatleddet, altså $\beta = 1$. Med $\beta = 0$ mister derivatleddet sin sin evne til å gi ekstra pådragsbidrag ved endringer i settpunktet. Derivatleddets stabiliserende eller dempende evne tapes imidlertid ikke da denne evnen er knyttet til derivasjonen av prosessutgangen y . $\beta = 1$ er uproblematisk for (11)–(14) for alle typer settpunkter. Med $\beta = 0$ får imidlertid (10) problemer ved sprangvis endring av settpunktet. Det oppstår da nemlig store motsatt rettede utslag i derivatleddet u_d i ved sprangvise endringer i settpunktet r — til tross for filteret. Det motsatt rettede utslag stammer fra leddet $-2e_{df}(k-1)$ i (10). Dette medfører at $u(k)$ får en stor verdi med motsatt fortegn i forhold til $u(k-1)$, og integratoren i regulatoren får en uheldig brå endring av “innholdet” eller “ladningen”, og det kan ta lang tid før denne ladningen er ”utladet”. Problemet for (10) elimineres ved å sette $\beta = 0$ i (8), men $\beta = 0$ bør unngås, som drøftet ovenfor. Figur 8 viser r , y og u for PID-IT (som benytter (10)) med $\beta = 1$. Eksperimentet er utført omkring arbeidspunktet svarende til $y_0 = 200$ °C. Det uheldige utslaget i pådraget ved spranget i settpunktet blir demonstrert.

I PID-IT som benyttes i dagens kalibrаторer, er problemet med det kraftige motsatt rettede pådraget etter et sprang i settpunktet eliminert ved at regulatoren kjøres i manuell noen sekunder etter spranget. Imidlertid blir derved regulerings-systemet noe (noen sekunder) tregere.

Figur 10 viser r , y og u for PID-P, som er basert på (11)–(14), med $\beta = 1$. Eksperimentet er utført omkring arbeidspunktet svarende til $y_0 = 200$ °C. *Vi ser at det ikke synes å være noen problemer knyttet til den sprangvise endringen av settpunktet for PID-P.*

4.3 Betydningen av lavpassfilter i serie med derivatleddet

I PID-IT er det ikke benyttet filter. Figur 11 viser r , y og u uten filter. Regulatoren er riktignok PID-P, men betydningen av filteret er den samme for PID-IT som for PID-P. Vi ser at pådraget er svært støyfylt. Denne støyen er ikke nødvendigvis uakseptabel for kalibratoren siden hele systemet er elektronisk/termisk og utstyret derfor ikke vil bli ødelagt av de brå pådragsendringene. Dessuten vil pådragsstøyen bli filtrert (midlet) gjennom selve prosessen (blokken), og den vil derfor knapt gi noen respons i temperaturen. Dersom pådraget skal



Figur 8: r og y (øverst) og u (nederst) for regulatoren PID-IT med full vekting av settpunktet ($\beta = 1$).

vises på skjerm, vil imidlertid et støyfylt pådrag gi et uheldig inntrykk—man vil spørre seg om det er noe galt med kalibratoren. Det er videre en viss fare for nedfolding eller aliasing av den høyfrekvente støyen. Støyen kan således være opphav til drift i det fysiske pådraget, hvilket kan få prosessen til å drive vekk fra settpunktet (i en periode).

Det kan være aktuelt å benytte pådraget som parameterstyringsvariabel ifm. adaptiv regulering, jf. underkapittel 5. Til slik bruk må pådraget uansett filtreres.

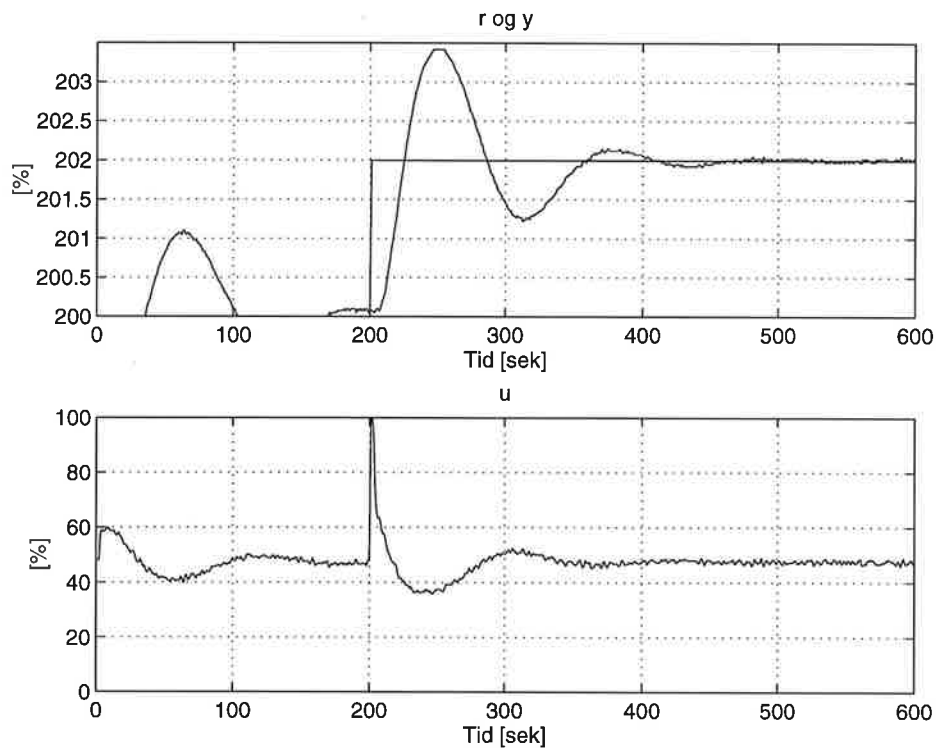
Figur 10 viser r , y og u med filter. Regulatoren er PID-P. Eksperimentet er utført omkring arbeidspunktet svarende til $y_0 = 200$ °C. Sammenlikning med figur 11 viser at pådraget er langt roligere med filter i serie med derivatleddet.

4.4 Betydningen av samplingsintervallet T

I eksperimentoppsettet er tidsskrittet eller samplingsintervallet $T = 0,223$ sek. I reguleringssystemet i den kommersielle kalibratoren er imidlertid $T = 0,20$ sek. Vil reguleringssystemets ytelse avhenge betydelig av verdien av T ? Det kan vises, jf. kapittel 14.3.6 i [2], at sample/hold-elementet kan betraktes som en

dødtid lik $T/2$ i reguleringsløyfen. Å benytte $T = 0,20$ i stedet for $T = 0,223$ (regulatorparametrene er i rapporten utviklet med $T = 0,223$) innebærer således en reduksjon av denne ekvivalente tidsforsinkelsen på $\Delta T = 0,0223$ sek. En reduksjon av tidsforsinkelsen gir generelt *bedre* stabilitet i reguleringsystemet, så å benytte $T = 0,200$ skulle derfor være trygt.

Hva med virkningen av å *øke* samplingsintervallet T , om det skulle være ønskelig? La oss se på figur 9 som viser r , y og u for $T = 1$. Sammenlikning med figur 10,



Figur 9: r , y og u for $T = 1$.

der $T = 0,223$ sek., viser at reguleringsystemets stabilitet og dynamiske ytelse ikke er nevneverdig endret som følge av økningen av T fra $0,223$ til 1 sek.

En konklusjon av det ovenstående er at reguleringsystemets ytelse er tilnærmet uavhengig av samplingsintervallets størrelse, ihvertfall så lenge T er mindre enn 1 sek. (Større T er lite aktuelt for kalibratoren.)

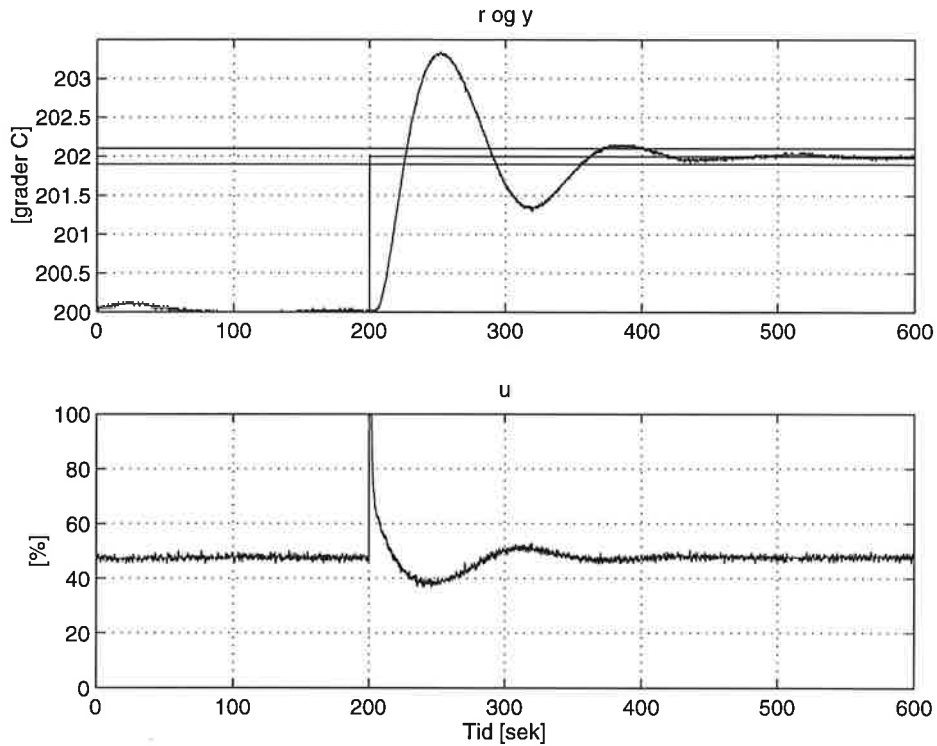
4.5 Betydningen av regulatorparametrenes verdier

Figur 10 viser en sprangrespons etter et sprang med høyde 2 grader i settpunktet for PID-P med faste regulatorparametre som har verdier som funnet for arbeids-

punktet der $y_0 = 200 \text{ }^\circ\text{C}$, altså

$$K_{p650} = 46,3, T_i = 50,3, T_d = 12,6, T_f = 1,26 \quad (16)$$

Verdiene $202 \pm 0,1 \text{ }^\circ\text{C}$ er tegnet inn (for avlesning av innstillingstiden $T_{i0,1}$ etter

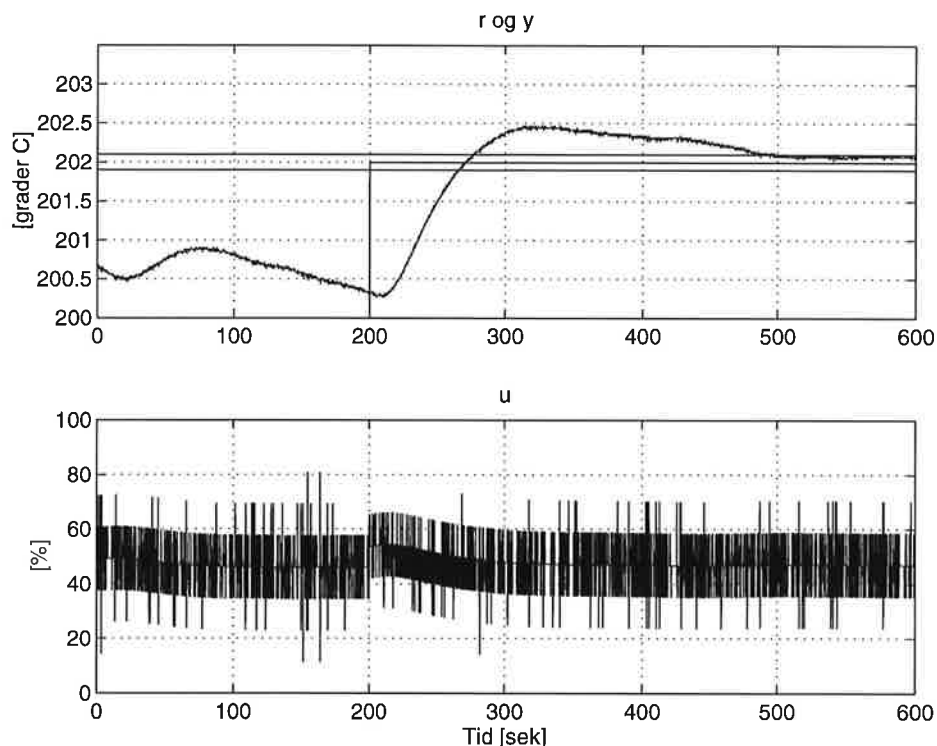


Figur 10: r og y (øverst) og u (nederst) etter et sprang i r . Verdiene $202 \pm 0,1 \text{ }^\circ\text{C}$ er tegnet inn (for avlesning av innstillingstiden). Regulatoren er PID-P.

spranget på $2 \text{ }^\circ\text{C}$). Innstillingstiden avleses til å være ca. 200 sek. Figur 11 viser sprangresponsen (med PID-P, men uten filter, som i PID-IT) med regulatorparametre som for PID-IT for arbeidspunktet svarende til $y_0 = 200 \text{ }^\circ\text{C}$, jf. vedlegg B,

$$K_{p650} = 24, T_i = 115, T_d = 28 \quad (17)$$

Responseren er en del tregere med disse regulatorparametrene, hvilket kan tilskrives en mindre K_p -verdi kombinert med en større T_i -verdi i det aktuelle arbeidspunkt. Innstillingstiden $T_{i0,1}$ (etter spranget på $2 \text{ }^\circ\text{C}$) avleses til å være ca. 300 sek. Vi ser videre at pådraget er svært støyfylt i figur 11, hvilket skyldes at det der ikke er benyttet filter sammen med derivatleddet (høyfrekvent kvantiseringsstøy blir kraftig forsterket gjennom derivatoren).



Figur 11: r og y (øverst) og u (nederst) etter et sprang i r . Verdiene $202 \pm 0,1$ °C er tegnet inn (for avlesning av innstillingstiden). Regulatorparametrene er som for PID-IT. Det er ikke filter i serie med derivatleddet.

5 Adaptiv (parameterstyrt) regulering

5.1 Hvorfor adaptiv regulering?

Fra tabell 1, eller figurene 5–7, ses at de beregnede regulatorparametre varierer med arbeidspunktet. Man vil sikre at reguleringsystemet til enhver tid, eller i ethvert arbeidspunkt, har tilfredsstillende dynamisk ytelse dersom regulatorparametrene til enhver tid (i hvert arbeidspunkt) har “optimale” verdier. Dette kan realiseres ved å uttrykke K_p som funksjon av pådraget u (det antas at K_p er en funksjon av u snarere enn en funksjon av y , jf. kapittel 3), og T_i , T_d og $T_f = 0,1T_d$ som funksjoner av y . Dette er parameterstyring av regulatorparametrene, og reguleringsystemet er adaptivt siden regulatorfunksjonen til enhver tid er tilpasset prosessens dynamiske egenskaper. Utvikling av parameterstyringen av de enkelte regulatorparametrene er beskrevet i det følgende.

5.2 Parameterstyring av K_p

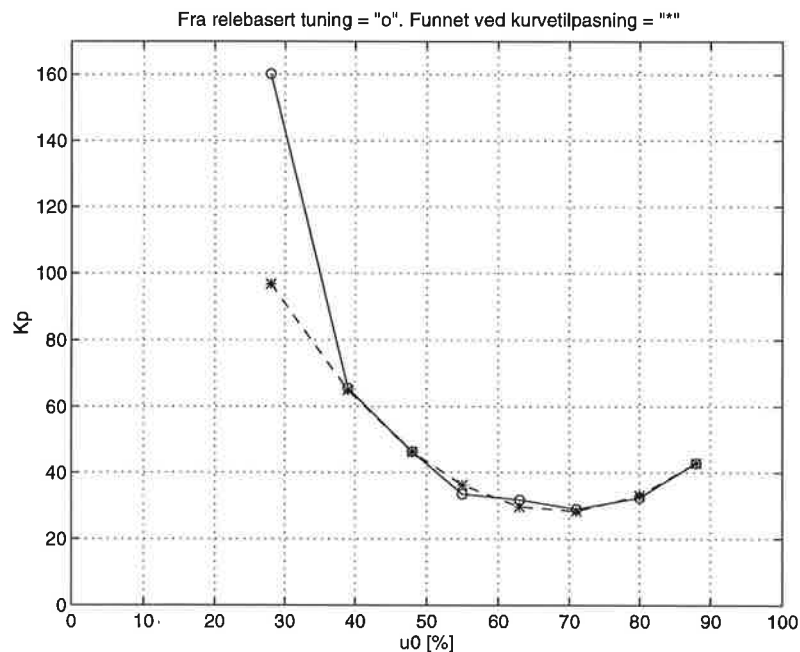
Fra figur 5 ser vi at et 2. ordens polynom bør kunne gi en (tilnærmet) funksjonssammenheng mellom K_p og u . Polynomet er på formen

$$K_p = a_2 u^2 + a_1 u + a_0 \quad (18)$$

der koeffisientene a_i kan bestemmes ut fra minste kvadraters metode, jf. kapittel 10.2 i [2]. Fra figuren ser vi at K_p bør ha spesielt store verdier ved lave verdier av u . Jeg har valgt å ekskludere arbeidspunktet der $u_0 = 28$ fra grunnlaget for tilpasningen av det 2. ordens polynomet. Det viser seg at dette gir en noe mindre verdi av K_p for lave u enn hva som kunne ha vært oppnådd, men det er et trygt valg (reguleringsystemets stabilitet blir jo bare bedre). Matlab-funksjonen `polyfit` beregner a_i i (18) ut fra minste-kvadraters metode (man kan også enkelt gjøre det manuelt, jf. [2]). Resultatet er

$$a_2 = 0,0407, \quad a_1 = -5,615, \quad a_0 = 220,1 \quad (19)$$

Figur 12 viser de opprinnelige K_p -verdiene og K_p -verdiene som beregnet fra (18).



Figur 12: De opprinnelige K_p -verdiene (avmerket med "o") og K_p -verdiene beregnet fra det tilpassede 2. ordens polynom (avmerket med "*").

Parameterstyringen av K_p realiseres ved å bruke (18) til å beregne K_p som funksjon av den til enhver tid foreliggende verdi av pådraget u (i prosent).

Pådraget u kan være noe støyfylt, se f.eks. figur 10. Det vil gi støy i K_p via (18). Støyen i K_p kan reduseres ved å filtrere u som inngår i (18). Filteralgoritmen

(15), men med u i stedet for e_d og u_f i stedet for e_{df} , kan da benyttes. Vi får

$$u_f(k) = \frac{2 - T/T_f}{2 + T/T_f} u_f(k-1) + \frac{T/T_f}{2 + T/T_f} [u(k) + u(k-1)] \quad (20)$$

og u_f tar plassen for u i (18). Filtertidskonstanten kan settes lik

$$T_f = 5T \quad (21)$$

der T er samplingsintervallet. Filterets båndbredde er $\omega_b = 1/T_f$ [rad/s] eller $f_b = \omega_b/2\pi$ [Hz], som med $T = 0,2$ sek. blir $f_b = 0,16$ Hz.

5.3 Parameterstyring av T_i , T_d og T_f

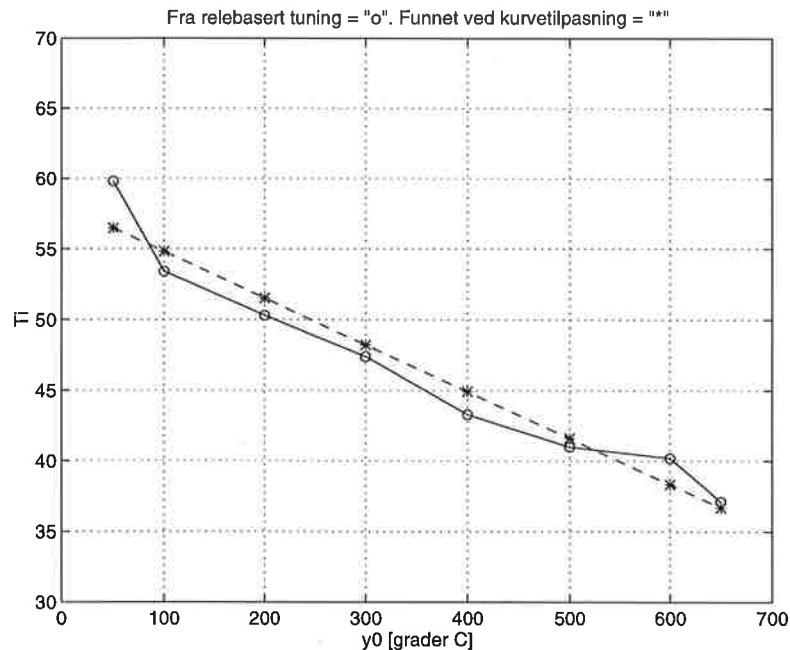
Fra figur 6 ses at et 1. ordens polynom bør kunne representere funksjonssammenhengen mellom T_i og y . Polynomet er på formen

$$T_i = b_1 y + b_0 \quad (22)$$

Minste kvadraters metode gir

$$b_1 = -0,033, \quad b_0 = 58,1 \quad (23)$$

Figur 13 viser de opprinnelige T_i -verdiene og T_i -verdiene som beregnet fra (22).



Figur 13: De opprinnelige T_i -verdiene (avmerket med "o") og T_i -verdiene beregnet fra det tilpassede 1. ordens polynom (avmerket med "*").

Parameterstyringen av T_i realiseres ved å bruke (22) til å beregne T_i som funksjon av den til enhver tid foreliggende verdi av temperaturen y (i grader C).

Parameterstyringen av T_d kan realiseres ved at T_d til enhver tid beregnes ved

$$T_d = \frac{T_i}{4} \quad (24)$$

siden dette er sammenhengen mellom T_d og T_i ihht. Ziegler-Nichols' formler for regulatorparametrene.

Parameterstyringen av T_f kan realiseres ved at T_f til enhver tid beregnes ved

$$T_f = \alpha T_d \quad (25)$$

der α kan velges som

$$\alpha = 0,1 \quad (26)$$

(eller f.eks. 0,2 dersom filtervirkningen skal økes (filterets båndbredde reduseres)).

Siden temperaturmålingen inneholder lite støy, skulle det ikke være nødvendig å filtrere y før den benyttes i parameterstyringen.

5.4 Responser med den adaptive regulatoren

Den adaptive PID-regulatoren utviklet ovenfor er sammenliknet med en PID-regulator med faste parametre. De faste parametrene er valgt lik

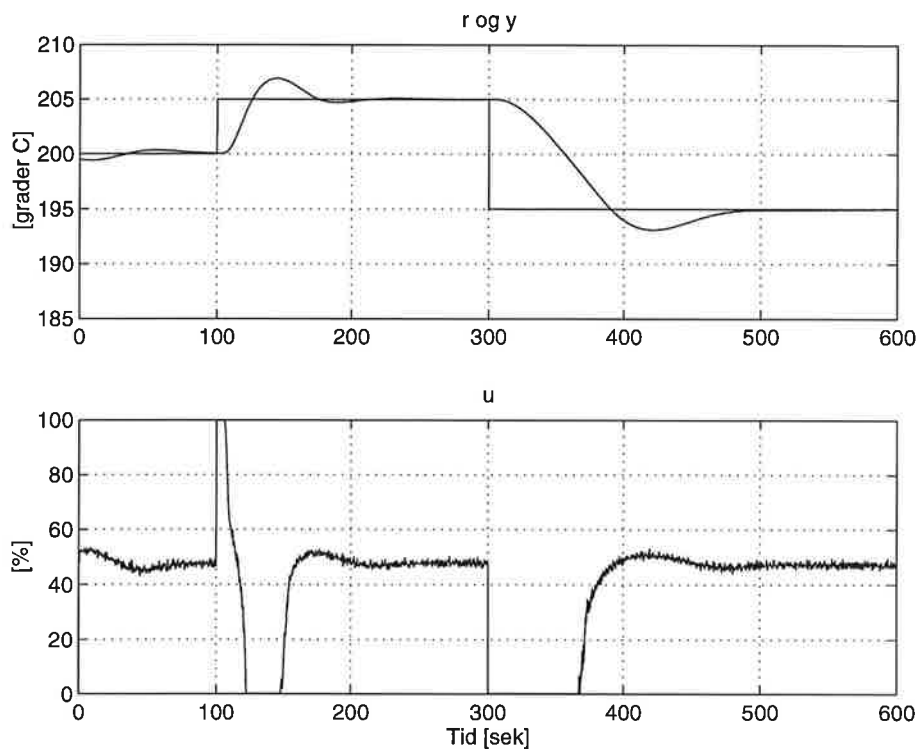
$$K_p = 30,0, T_i = 50,0, T_d = 12,5, T_f = 1,25 \quad (27)$$

Dette er "konservative" parametre som er valgt ut fra tabell 1 slik at regulerings-systemets stabilitet bør være sikret over hele arbeidsområdet.

Figur 14 viser r , y og u for det adaptive reguleringsystemet. Figur 15 viser r , y og u for reguleringsystemet med "konservative" regulatorparametre. Sammenlikning av figurene viser at det adaptive reguleringsystemet har bedre dynamisk ytelse (gir raskere regulering) enn reguleringsystemet med faste, "konservative" regulatorparametre.

Regulatoren (PID-IT) i dagens kalibrator er adaptiv. Imidlertid blir alle regulatorparametrene, også K_p , oppdatert av temperaturmålingen y . Dette gir en unødig forsiktig justering av K_p fordi temperaturen vil kun endre seg relativt lite i forhold til endringer av pådraget. Justering på basis av u gir (langt) raskere justering av K_p , og det er dessuten gode grunner for at justeringen skal foregå på basis av u fremfor y .

Vedlegg A viser det komplette Matlab-programmet som realiserer det adaptive reguleringsystemet som er utviklet og benyttet ovenfor.



Figur 14: r , y og u for adaptivt reguleringsystem.

6 Rampeformet settpunkt

I forbindelse med kalibrering av termostater er det aktuelt med rampeformet temperatursettpunkt. Det kan vises at det vil oppstå et stasjonært reguleringsavvik e_s som er endelig, men forskjellig fra null for et slikt settpunkt, se figur 16. (Reguleringsystemet inneholder én integrator, nemlig den som er regulatoren. Og med én integrator blir det stasjonære rampeavviket endelig, men forskjellig fra null, se tabell 8.1 i [1].) Det er ønskelig å finne settpunktets maksimale stigningstall $K_r = K_{r\max}$ slik at $|e_s| \leq 0,5 \text{ }^\circ\text{C} = e_{s,\max}$.

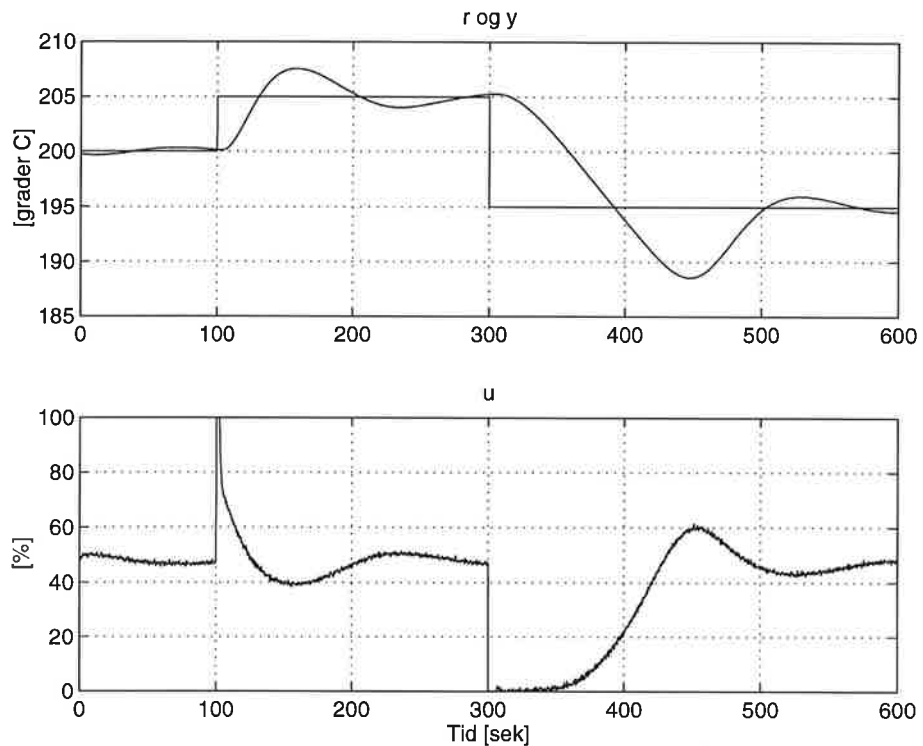
Ihht. tabell 8.1 i [1] er e_s gitt ved

$$e_s = \frac{K_r}{K_0} \quad (28)$$

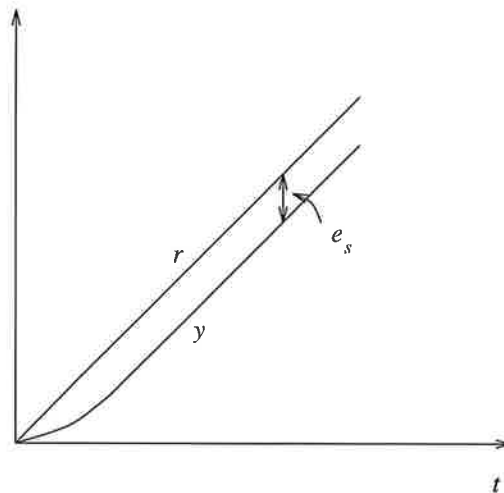
der K_0 er sløyfeforsterkningen. K_0 fremkommer når vi setter reguleringsystemets sløyfetransferfunksjon h_0 på formen (likning (8.28) i [2])

$$h_0(s) = \frac{K_0(1 + b_1s + b_2s^2 + \dots)}{s^q(1 + a_1s + a_2s^2 + \dots)} \quad (29)$$

Det antas at prosessen (inkludert måleelementet) har forsterkning K (systemet kan ellers antas å være et 1. ordens system eller et 2. ordens system eller et høyere



Figur 15: r , y og u for reguleringsystemet med faste “konservative” regulatorparametre.



Figur 16: Rampeformet settpunkt og det stasjonære reguleringsavvik.

ordens system, med eller uten dødtid—det har ingen betydning for resultatet). Det antas at regulatoren er en PID-regulator med *full vektning* av settpunktet i derivatleddet, altså $\beta = 1$, slik tilfellet er for regulatoren benyttet i prosjektet. (Tilfellet $\beta = 0$ drøftes senere i kapitlet.) Det kan vises at K_0 for reguleringssys-

temet blir

$$K_0 = \frac{K_p K}{T_i} \quad (30)$$

Dette innsatt i (28) gir

$$e_s = \frac{K_r T_i}{K_p K} \quad (31)$$

Fra (31) fås

$$K_r = \frac{e_s K_p K}{T_i} \quad (32)$$

som er en formel for K_r . e_s antas spesifisert, og det antas at K_p , T_i og K har kjente verdier. Med utgangspunkt i (32) kan det utledes en alternativ måte å beregne K_r på. Jeg kommer snart tilbake til dette. K_r i (32) kan ha enhet %/sek eller °C/sek. e_s har da enhet % hhv. °C. K_p har enhet %/% eller 1. T_i har enhet sek. K har enhet %/% eller 1. K kan finnes fra statiske eksperimenter på prosessen, slik: K er (pr. definisjon) endringen av utgangen eller målingen dividert med endringen av inngangen eller pådraget, under statiske forhold, dvs. når endringene er fra en statisk verdi til en annen:

$$K = \frac{\Delta y_s}{\Delta u_s} \quad (33)$$

Her er både Δy_s og Δu_s i %. Vi kan bruke dataene i tabell 1 eller figur 4 til å finne K . La oss ta utgangspunkt i den tilnærmet lineære delen av figur 4. Kurven har der stigningstallet

$$K_1 \approx 12 \text{ °C/\%} \quad (34)$$

La nå K_{pg} være omregningsfaktoren fra % til °C. Dersom 0–100% svarer til 0–650 °C, blir

$$K_{pg} = \frac{650}{100} = 6,5 \text{ °C/\%} \quad (35)$$

Prosessforsterkningen blir

$$K = \frac{K_1}{K_{pg}} \quad (36)$$

Dette innsatt i (32) gir

$$K_r = \frac{e_s K_p K}{T_i} = \frac{e_s K_p K_1}{T_i K_{pg}} \quad (37)$$

som er en alternativ formel for K_r .

Dersom regulatoren er adaptiv, vil K_p og T_i variere, men ved å sette inn den minste verdi av K_p og den største verdi av T_i som kan opptre, får man en K_r -verdi for hvilken e_s sikkert vil bli mindre enn eller lik 0,5 °C.

For en regulator med faste parametre kan vi velge $K_p = 30$ og $T_i = 50$ (jf. kapittel 5.4) som vi kan sette inn i (37).

Merk at prosessforsterkningen K vil variere noe med arbeidspunktet—vi ser fra figur 4 at stigningstallet $K = \Delta y_s / \Delta u_s$ varierer. Hvis man skal være helt sikker

på at e_s holder seg innenfor en spesifisert verdi over *hele arbeidsområdet*, må man i (38) sette inn de minst gunstige parameterverdier for K_p , T_i (i en adaptiv regulator vil disse variere med arbeidspunktet) og K , dvs. de parameterverdiene som gir den minste verdi av K_r .

Prosjektet skulle spesielt beregne den maksimale verdien av K_r svarende til at e_s er mindre enn $0,5\text{ }^\circ\text{C}$. (37) gir da

$$K_{r\max} = \frac{e_{s\max} K_p K_1}{T_i K_{pg}} \quad (38)$$

$$= 0,54\text{ }^\circ\text{C/sek} \quad (39)$$

Det skal altså brukes et temperatursettpunkt gitt ved

$$r(t) = K_r t \quad (40)$$

der K_r ikke skal være større enn $0,54\text{ }^\circ\text{C/sek}$.

Figur 17 viser r , y og e , samt u for ett eksperiment. De enkelte parametrene har verdier som angitt ovenfor, dvs. $e_s = 0,5$, $K_p = 30$, $T_i = 50$ og $K = 12$, hvilket gir $K_r = 0,54$. Vi ser at avviket ganske riktig er tilnærmet lik den spesifiserte stasjonære verdien $e_s = 0,5\text{ }^\circ\text{C}$.

Alternativ beregning av $K_{r\max}$. Ovenfor ble det nevnt at det kan utledes en alternativ måte å beregne $K_{r\max}$ på. Metoden er som følger. Fra (32) fås

$$K_{r1} = \frac{e_{s1} K_p K}{T_i} \quad (41)$$

der K_{r1} og e_{s1} er ett sett sammenhørende verdier. K_p , K og T_i kan nå elimineres fra (41) og (38) (uttrykkene divideres). Det gir

$$K_{r\max} = e_{s\max} \cdot \frac{K_{r1}}{e_{s1}} \quad (42)$$

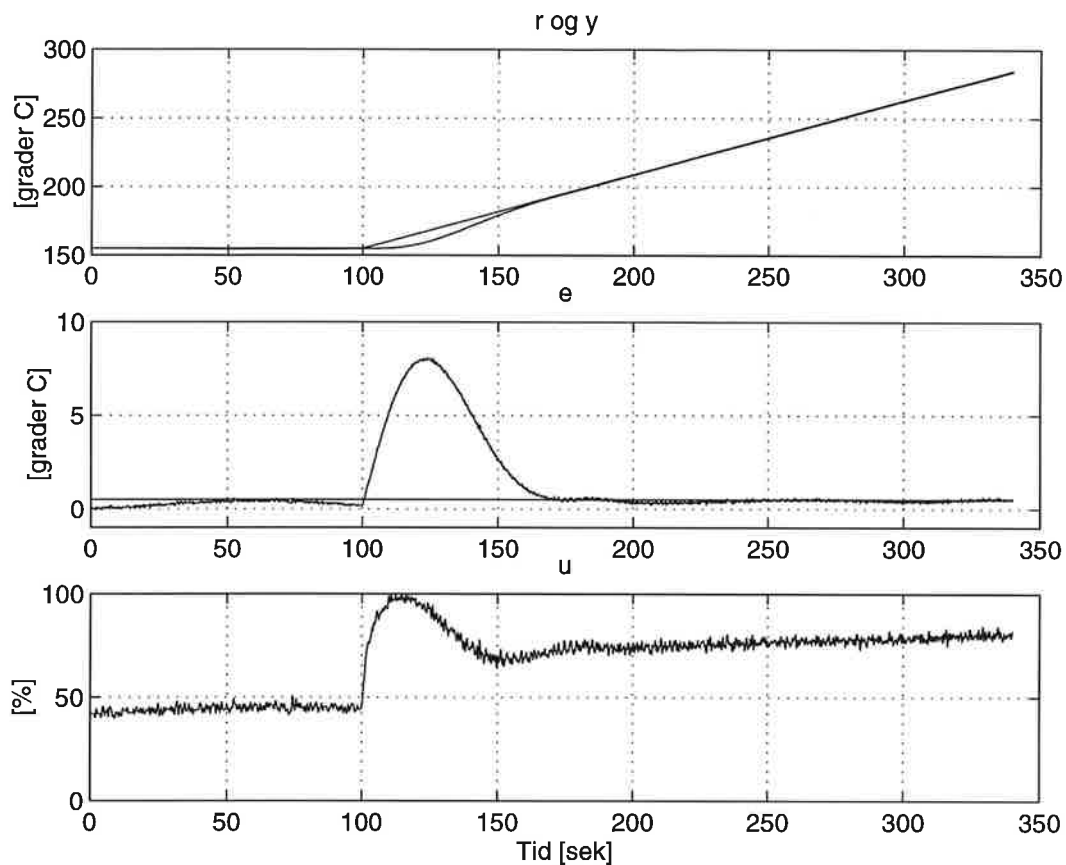
$e_{s\max}$ er her spesifisert. *Vi kan altså beregne $K_{r\max}$ dersom vi kjenner sammenhørende verdier for K_r og e_s for ett tilfelle (ett eksperiment).*

Pådraget. Det kan være nyttig å kjenne til hvordan pådraget, u , utvikler seg ved rampeformet settpunkt. La oss forutsette stasjonære forhold, dvs. at det stasjonære reguleringsavviket, e_s , er konstant. Regulatorfunksjonen er (på tidskontinuerlig form)

$$u(t) = u_0 + K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + K_p T_d \frac{de_f(t)}{dt} \quad (43)$$

Når avviket er konstant, blir derivatleddet null fordi $de_f(t)/dt = 0$, og (43) blir (siden integralet av den konstante e_s fra 0 til t er $e_s t$)

$$u(t) = u_0 + K_p e_s + \frac{K_p}{T_i} e_s t \quad (44)$$



Figur 17: r og y og reguleringsavviket e , samt pådraget u med rampeformet settpunkt. e_s er spesifisert til å være $0,5\text{ }^\circ\text{C}$. $e = 0,5\text{ }^\circ\text{C}$ er inntegnet i det midterste plottet.

($u(t)$ blir altså rampeformet.)

(44) kan brukes til f.eks. å beregne den maksimale tiden, t_{\max} , som det rampeformede settpunktet kan vare før pådraget går i metning (etter at pådraget har gått i metning, vil reguleringsavviket bli jevnt økende). Fra (44) fås

$$t_{\max} = \frac{u_{\max} - u_0 - K_p e_s}{K_p / T_i} \quad (45)$$

Endringen av settpunktet (og temperaturen) i løpet av tiden t_{\max} blir

$$\Delta r = K_r t_{\max} \quad (46)$$

Betydningen av settpunktets vekt (verdien av β) i derivatleddet. I regulatoren benyttet ovenfor var det full vektning av settpunktet i derivatleddet, dvs. $\beta = 1$, jf. (8). $\beta = 1$ gir raskere regulering enn $\beta = 0$. I mange kommersielle

regulatorer er det allikevel satt $\beta = 0$ siden det begrenser utslaget i pådraget ved brå endringer av settpunktet. Slike hensyn er det imidlertid ingen grunn til å ta i kalibratoren (pådragsorganet er der elektronisk, ikke mekanisk), så vi kan trygt sette $\beta = 1$. Men la oss allikevel her se på virkningen av å sette $\beta = 0$. Fra (7) ser vi at effekten av å sette $\beta = 0$, er å addere leddet

$$v = -K_p T_d \frac{d[r_f(t)]}{dt} \quad (47)$$

til pådraget. Her er r_f lavpassfiltrert r . Anta at r er en rampe med stigningstall K_r . Under stasjonære forhold blir dr/dt lik K_r , og også $d(r_f)/dt$ blir lik K_r stasjonært. Stasjonært blir da v lik $v_s = -K_p T_d K_r$, som er *konstant*. v_s opptrer ekvivalent med en konstant forstyrrelse, som angriper reguleringsystemet på samme sted som pådraget. Regulatorens integralvirkning vil generelt kompensere fullt ut for konstante forstyrrelser, også for v_s . Ut fra dette vil verdien av β ikke ha noen betydning for det stasjonære reguleringsavviket ved rampeformet settpunkt, men transientresponsen kan antas å bli noe tregere med $\beta = 0$ enn med $\beta = 1$.

Figur 18 viser r og y og reguleringsavviket e , samt pådraget u for et eksperiment der $\beta = 0$. Eksperimentet er ellers identisk med det som genererte responsene vist i figur 17 (β var der lik 1). Plottene bekrefter at det stasjonære avviket er (nær) $e_s = 0,5$ °C, altså det samme som med $\beta = 1$. Ved å sammenlikne figurene 18 og 17 ser vi videre at transientresponsen i y er noe raskere (avviket mindre) med $\beta = 1$ enn med $\beta = 0$. *Konklusjonen blir at verdien av β ikke har noen betydning for det stasjonære avviket, men at transientavviket blir mindre med $\beta = 1$ enn med $\beta = 0$.*

7 Frekvensresponsanalyse

Frekvensresponsen $h_0(\omega)$ av reguleringsystemets sløyfetransferfunksjon gir viktig informasjon om reguleringsystemets egenskaper. I prosjektet er $h_0(\omega)$ beregnet på basis av bl.a. en estimert transferfunksjon for prosessen, samt kjennskap til regulatorens transferfunksjon. La oss først se litt på estimering av prosessens transferfunksjon. Deretter presenteres $h_0(\omega)$ og en vurdering av denne gis.

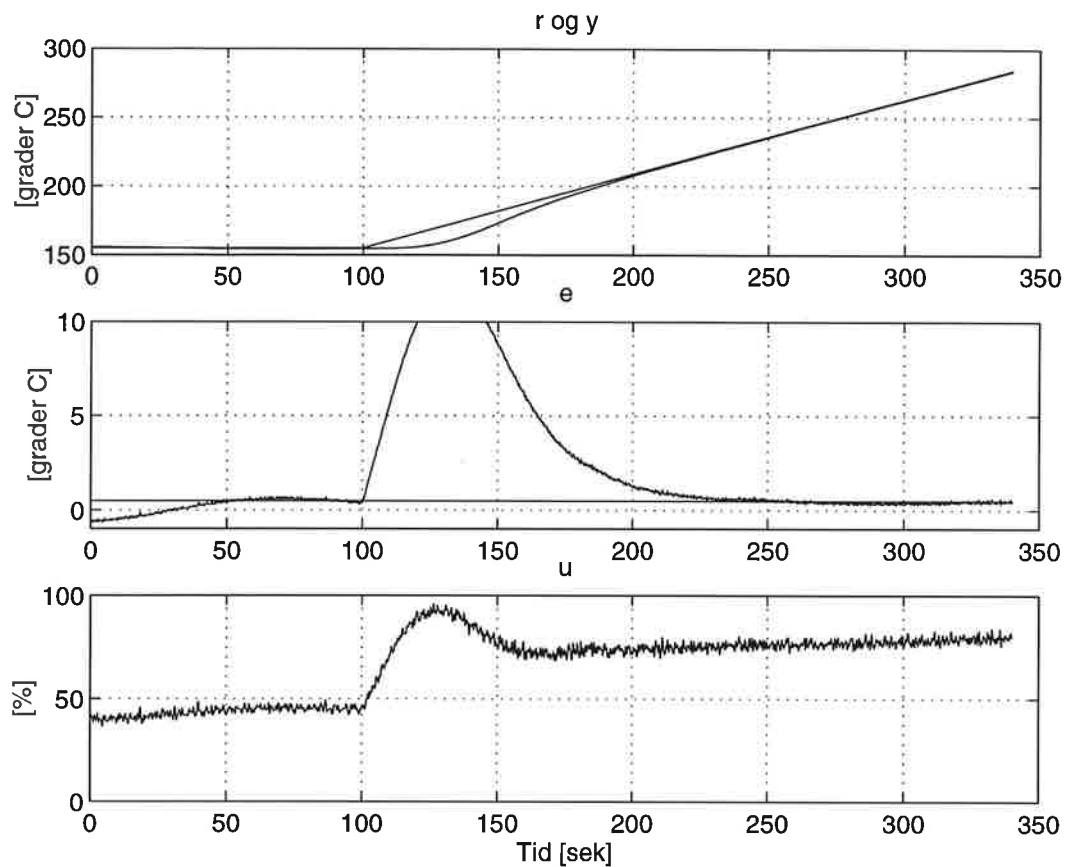
Det er i prosjektet utviklet en transferfunksjonsmodell ut fra loggede sammenhørende tidsserier $\{u(k)\}$ av pådraget og $\{y(k)\}$ av temperaturmålingen. Modellen er på formen

$$\Delta y(z) = h(z)\Delta u(z) \quad (48)$$

der

$$h(z) = \frac{b(z)z^{-n_d}}{a(z)} \quad (49)$$

er systemets transferfunksjon. $a(z)$ og $b(z)$ er polynomer i z -operatoren. n_d er antall tidsskritt som en eventuell ren dødtid svarer til. z er z -operatoren som spiller mye av samme rollen for tidsdiskrete systemer som Laplacevariabelen



Figur 18: r og y og reguleringsavviket e , samt pådraget u med rampeformet settpunkt. β er satt lik 0. $e = 0,5$ °C er inntegnet i det midterste plottet.

s gjør for tidskontinuerlige systemer. En transferfunksjonsmodell representerer systemets oppførsel kun i nærheten av et bestemt arbeidspunkt. Δu og Δy i (48) er avvikene eller utslagene fra verdien av u hhv. y i arbeidspunktet. Med andre ord:

$$\Delta u = u - u_0 \quad (50)$$

og

$$\Delta y = y - y_0 \quad (51)$$

Matlabs System Identification Toolbox (SIT) har en rekke funksjoner som estimerer en passende transferfunksjon $h(z)$ ut fra $\{u(k)\}$ og $\{y(k)\}$. Jeg skal ikke gå i detalj omkring estimeringen.

Reguleringssystemets sløyfetransferfunksjon $h_0(z)$ er

$$h_0(z) = h_r(z)h_p \quad (52)$$

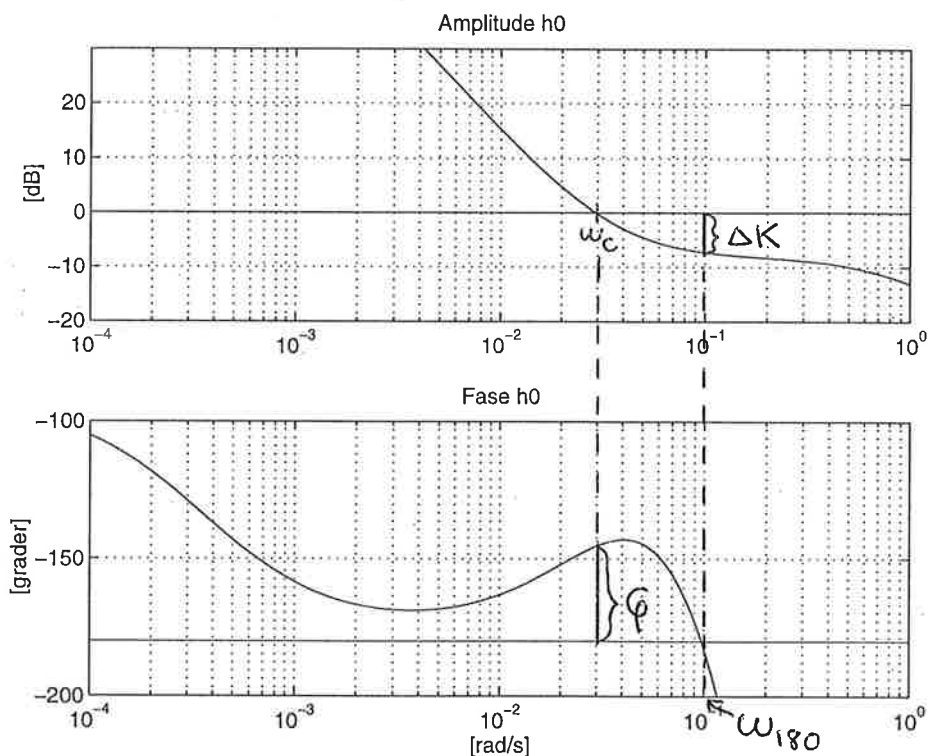
der regulatorens transferfunksjon $h_r(z)$ er kjent siden. $h_r(z)$ kan finnes fra (den diskrete) regulatoralgoritmen, som jo er kjent, jf. kapittel 4.1. $h_p(z)$ i (52) er

estimert fra loggede $\Delta u(k)$ og $\Delta y(k)$ omkring arbeidspunktet svarende til $y_0 = 200$ °C.

Fra $h_0(z)$ kan man beregne frekvensresponsen $h_0(\omega)$ ved å sette $z = e^{j\omega T}$ der T er samplingsintervallet. Funksjonen dbode i Matlabs Control System Toolbox er her benyttet til å beregne $h_0(\omega)$, som er vist i figur 19. Regulatorparametrene som er benyttet i $h_r(z)$, er

$$K_p = 46,3, T_i = 50,3, T_d = 12,6, T_f = 1,26 \quad (53)$$

Regulatoren er PID-P. Fra figur 19 finner vi at forsterkningsmarginen er



Figur 19: Sløyfetransferfunksjonens frekvensrespons $h_0(j\omega)$ (basert på bl.a. estimert prosess-transferfunksjon $h_p(z)$).

$$\Delta K \approx 8 \text{ dB} = 2,51 \quad (54)$$

mens fasemarginen er

$$\varphi \approx 35^\circ \quad (55)$$

Både ΔK og φ har rimelige verdier. (Jeg har prøvd å oppnå høyere kryssfrekvens ω_c (båndbredde for reguleringssystemet) med akseptable stabilitetsmarginer ved å justere (litt) på regulatorparametrene, men jeg har ikke funnet nye parametre som gir vesentlig høyere ω_c .)

Fra $h_0(\omega)$ i figur 19 ser vi at fasemarginen φ blir kraftig redusert (reguleringssystemet får dårlige stabilitet) dersom sløyfeforsterkningen, K_0 , av en eller annen grunn blir redusert. K_0 blir redusert dersom regulatorforsterkningen K_p gis en mindre verdi. Dette tilsier at man skal være varsom med å velge for liten K_p -verdi i regulatoren. K_0 blir også redusert dersom prosessforsterkningen blir redusert. K er mindre i arbeidspunkter svarende til spesielt høye og spesielt lave temperaturer, jf. figur 4 (K er lik $d(y_0)/d(u_0)$). Dersom K_p holdes fast, kan man altså reguleringssystemet få dårlig stabilitet ved regulering omkring nevnte arbeidspunkter. Problemene med redusert stabilitet i enkelte arbeidspunkter skal i prinsippet ikke eksistere ved bruk av en adaptiv regulering (grovt sagt justeres da K_p slik at $K_0 = K K_p$ holdes konstant).

8 En raskere kalibrator?

Man kan få en (langt) raskere kalibrator (med raskere responser) ved å redusere blokkens masse til et minimum. Blokkens temperaturutjevner eller selvregulerende funksjon blir da selvsagt også redusert, men dette kan kompenseres for av en "hurtigarbeidende" temperaturregulator, som fremdeles kan være en PID-regulator. På denne måten kan man få en raskere og lettere og rimeligere (?) kalibrator, og temperaturstabiliteten og -nøyaktigheten blir ikke nødvendigvis dårligere.

9 Konklusjoner

1. Det er funnet gode regulatorparametre i en rekke arbeidspunkter for en (tidsdiskret) PID-regulator vha. relésvingninger kombinert med Ziegler-Nichols' lukket-sløyfe-metode.
2. I en PID-algoritme svarende til at hele regulatorfunksjonen er diskretisert under ett, oppstår problemer med kraftige motsatt (og feil) rettede utslag i pådraget ved sprang i settpunktet. En slik algoritme er benyttet i dagens (kommersielle) kalibrator (problemet er der løst ved å la regulatoren gå i manuell i en periode etter spranget). Problemet oppstår ikke i en PID-algoritme svarende til at P-, I- og D-leddene er diskretisert hver for seg og summert til slutt. Sistnevnte algoritme er benyttet i prosjektet.
3. Et (diskret) lavpassfilter i serie med regulatorens derivatledd gir en kraftig reduksjon av høyfrekvent støy i derivatleddet. Lavpassfilter benyttes ikke i dagens kalibrator.
4. Prosessdynamikken varierer med arbeidspunktet. Reguleringen blir bedre (raskere) med adaptiv regulering (parameterstyring av regulatorparametrene på basis av pådraget og temperaturmålingen) sammenliknet med bruk av en regulator med faste parametre.

5. Regulatorparametrene benyttet i dagens kalibrator gir unødig treg regulering (på kalibratoren benyttet i prosjektet). Regulatorforsterkningen er unødig lav i alle arbeidspunkter, og integraltiden synes å være beregnet feilaktig (for stor) i flere arbeidspunkter.
6. Siden pådragsorganet er elektronisk (og ikke mekanisk), er det uproblematisk at settpunktet inngår med full vekt i derivatleddet. Med full vekt av settpunktet, oppnås raskere transientresponser etter endringer av settpunktet. (Settpunktet inngår med full vekt i derivatleddet i dagens kalibrator.)
7. Ved rampeformet settpunkt er det stasjonære reguleringsavviket upåvirket av settpunktets vekt i derivatleddet, men transientavviket blir mindre.
8. Det er funnet en formel, (37), for sammenhengen mellom settpunktrampens stigningstall K_r og det stasjonære reguleringsavviket e_s . Ut fra formelen kan man beregne den maksimale K_r som gir et spesifisert maksimalt stasjonært reguleringsavvik. Spesielt fås $e_s < 0,5$ °C med $K_r < 0,54$ °C/sek.
9. Frekvensresponsanalyse
av sløyfetransferfunksjonens frekvensrespons, $h_0(\omega)$, viser at regulerings-systemet kan få dårlig stabilitet dersom sløyfeforsterkningen $K_0 = K_p K$ får en redusert verdi. K_0 reduseres dersom regulatorforsterkningen K_p reduseres (og K fast) eller prosessforsterkningen K reduseres (og K_p fast). K er liten i arbeidspunkter svarende til spesielt høye og spesielt lave temperaturer. Ved adaptiv regulering har reguleringsystemet alltid tilfredsstillende stabilitet.

10 Anbefalinger

Det anbefales at man forbedrer regulatorfunksjonen, ved å

- diskretisere P-, I- og D-leddet hver for seg,
- bruke filter i serie med derivatleddet,
- bruke funksjonsbasert (polynombasert) parameterstyring for å oppnå adaptiv regulering,
- finne mer optimale regulatorparametre i de aktuelle arbeidspunktene.

A Matlab-program

Nedenfor er vist Matlab-programmet som bl.a. implementerer regulatoren (8)—i adaptiv utgave, jf. kapittel 5.

```
%Adaptiv (parameterstyrt) PID-regulator der P-, I- og D-leddet er
%diskretisert hver for seg.
%Settpunktet blir derivert (beta=1).
%Filter paa D-leddet.
%Integrator-begrensning ved aa fryse ui naar u >umax eller <umin.
%Sprang i settpunktet ved tid tsprang.
clear %Sletter Matlabs arbeidsomraade
echo on
%[ymin ymax tslutt u0 Kp650 Ti Td Tf tsprang Rg dRg T]
%[175 225 600 48 46.2 50.3 12.6 1.26 200 200 2 .223]
echo off
%Oppgi parametre ved start av programmet:
inp=input('Oppgi [ymin ymax tslutt up0 Kp Ti Td Tf tsprang Rg dRg p T]: ');
%Enheter:
%tslutt: sek.
%u0: prosent
%Kp650: enhet 1. Kp oppgis som om maaleomraadet var 0-650 grader,
%men omregnes slik at den passer til det aktuelle maaleomr. (se nedenfor).
%Ti Td Tf: sek.
%Rg dRg grader
%T: sek
m=1;
ymin=inp(m);m=m+1;
ymax=inp(m);m=m+1;
maaleomraade=ymax-ymin;
Kmpv=100/5; %Maaleforsterkning. Fra V til prosent. 0-5V = 0-650 gr = 0-100 pros
Kmpg=maaleomraade/100; %Omregningsfaktor fra prosent til grader.
T0=ymin; %Nullnivaa for temperaturmaalingen (grader)
Kupv=(5-1)/100; %Paadragsomregningsfaktor. 0-100 prosent = 1 - 5 volt.
tslutt=inp(m);m=m+1; %Slutt-tidspunkt for eksperimentet
u0=inp(m);m=m+1; %Paadragsbias eller nominelt paadrag
Kp650=inp(m);m=m+1; %Kp svarende til maaleomraade 0-650 grader
Ti=inp(m);m=m+1; %Integraltiden i PID-regulatore
Td=inp(m);m=m+1; %Derivattiden i PID-regulatore
Tf=inp(m);m=m+1; %Filtertiden i PID-regulatore
tsprang=inp(m);m=m+1; %Tidspunkt for sprang i settpunktet
Rg=inp(m);m=m+1; %Settpunktet i grader
Rp=(Rg-T0)/Kmpg; %Settpunktet i prosent
dRg=inp(m);m=m+1; %Settpunktets spranghoyde i grader
dRp=dRg/Kmpg; %Settpunktets spranghoyde i prosent
T=inp(m);m=m+1; %Samplingsintervall
t=[T:T:tslutt]'; %Tidsvektor
N=length(t);
AI_kanal=10; %Kanalnr. for innlesning av analog spenning (temp.maaling)
AO_kanal=1; %Kanalnr. for utskrivning av analog spenning (paadrag)
```

```

%Definering (preallokering) av diverse vektorer:
rp=zeros(N,1)+Rp; %Settpunkt i prosent
rg=rp*Kmpg+T0; %Settpunkt i grader
rpdelta=zeros(N,1); %Endring av settpunkt i prosent
yp=zeros(N,1)+inn42(AI_kanal)*Kmvp; %Temperaturmaaling i prosent
yg=yp*Kmpg+T0; %Temperaturmaaling i grader
u=zeros(N,1)+u0; %Paadrag (prosent)
ui=u*0; %Paadragets I-ledd
ud=ui*0; %Paadragets D-ledd
U0=u; %Paadragets verdi som representerer arbeidspunkt, ifm. parameterstyring
UOf=U0; %Filtrert U0
umax=99.9; %Max paadrag i prosent
umin=0.1; %Min paadrag i prosent
uvmax=4.99; %Max paadrag spenning
uvmin=1; %Min paadrag i spenning
alfa=0.1; %alfa=Tf/Td i PID-regulatoren
beta=1; %Vekting av settpunktet i D-leddet
ep=(rp-yp); %Avvik i prosent
edp=beta*rp-yp; %Avviksledd benyttet i D-ledd
edpf=edp; %Filtrert edp

%Def av diverse konstanter:
a=(2-T/Tf)/(2+T/Tf); %Filterkonstant for filter foer D-leddet
b=(T/Tf)/(2+T/Tf); %Filterkonstant for filter foer D-leddet
Tff=5*T; %Filtertidskonstant
af=(2-T/Tff)/(2+T/Tff); %Filterkonstant for paadragfilter ifm parameterstyring
bf=(T/Tff)/(2+T/Tff); %Filterkonstant for paadragfilter ifm parameterstyring
%Koeffisienter i polynomer ifm. parameterstyring
a2=0.0408;
a1=-5.606;
a0=220.5;
b1=-0.033;
b0=58.1;

%Setter opp grafikk for sanntids plotting paa skjerm:
figure(1);
clf; %Nullstill figur-parametre
ha=gca;
set(ha,'GridLineStyle',':') % Bruker . p grid,
set(ha,'NextPlot','add') % Svarer til "hold on"
set(ha,'XGrid','on') % Disse svarer til "Grid on"
set(ha,'YGrid','on') % Kan bruke "grid on" i stedet....
set(ha,'XLim',[0 tslutt]) % Disse svarer til sette aksene...
set(ha,'YLim',[ymin ymax]) % Kan bruke "axis" i stedet....
lhr=line('color','y','EraseMode','none','xdata',[],'ydata',[]);
lhy=line('color','m','EraseMode','none','xdata',[],'ydata',[]);

figure(2);
clf;
ha=gca;
set(ha,'GridLineStyle',':') % Bruker . p grid,
set(ha,'NextPlot','add') % Svarer til "hold on"

```

```

set(ha,'XGrid','on')           % Disse svarer til "Grid on"
set(ha,'YGrid','on')           % Kan bruke "grid on" i stedet....
set(ha,'XLim',[0 tslutt])      % Disse svarer til sette aksene...
set(ha,'YLim',[0 100])         % Kan bruke "axis" i stedet....
%set(ha,'text','u')            % Kan bruke "axis" i stedet....
lhu=line('color','r','EraseMode','none','xdata',[],'ydata',[]);

tic=clock; %Hoerer sammen med etime (elapsed time) i sluttev programmet
tic %Registrerer naavaerende tidspunkt
for k=3:N %For-loekke som gjennomloepes en gang hvert samplingsintervall
while toc<T %Realiserer samplingsintervall paa T sek. toc=tiden fra siste tic
end; %while
tic

%Innlesing av maaling, generering av settpunkt og beregning av avvik:
yp(k,1)=inn42(AI_kanal)*Kmpv; %Innlesning av temp.maaling fra IO-kortet
                                %og omsetting fra V til %
if t(k,1)>tsprang, rpdelta(k,1)=dRp;end; %Sprang i settpunktet ved t=tsprang
rp(k,1)=Rp+rpdelta(k,1); %Settpunktet i rosent
ep(k,1)=rp(k,1)-yp(k,1); %Reguleringsavviket i prosent
edp(k,1)=beta*rp(k,1)-yp(k,1); %Mulighet for redusert vektning av settpunktet
edpf(k,1)=a*edpf(k-1,1)+b*(edp(k,1)+edp(k-1,1)); %Filtrering av avviket ep

%Parameterstyring av Kp, Ti, Td og Tf:
U0(k,1)=u(k-1,1); %Sist tilgjengelig paadrag representerer arbeidspunktet U0
U0f(k,1)=af*U0f(k-1,1)+bf*(U0(k,1)+U0(k-1,1)); %Filtrering av U0
Y0=yp(k,1)*Kmpg+T0; %Y0 representerer arbeidspunktet
Kp650=a2*U0f(k,1)^2+a1*U0f(k,1)+a0; %Kp svarende til arb.omraade 0-650 grader
Kp=Kp650*(maaleomraade/650); %Skalering av Kp ihht. aktuelt maaleomraade
                                %benyttet i eksperimentet, f.eks. 175-225=50 grader
Ti=b1*Y0+b0;
Td=Ti/4;
Tf=alfa*Td;

%Beregning av paadrag:
upk=Kp*ep(k,1); %Paadragets P-ledd
uik=ui(k-1,1)+(Kp*T/Ti)*ep(k,1); %Paadragets I-ledd
udk=(Kp*Td/T)*(edpf(k,1)-edpf(k-1,1)); %Paadragets D-ledd
u1=u0+upk+uik+udk; %Totalt paadrag foer integrator-begrensning

%Integrator-begrensning
if u1>umax,
u1=umax; %Begr. av beregnet paadrag
uik=ui(k-1,1); %Laasing av I-ledd (I-begrensning)
elseif u1<umin,
u1=umin; %Begr. av beregnet paadrag
uik=ui(k-1,1);end; %Laasing av I-ledd (I-begrensning)
ui(k,1)=uik;
u(k,1)=u1; %Totalt paadrag etter integrator-begrensning

uv1=u(k,1)*Kupv+uvmin; %Paadrag i volt
if uv1>uvmax,uv1=uvmax; %Begrensning av utskrevet paadrag i spenning

```

```

elseif uv1<uvmin,uv1=uvmin;end;
ut42(AO_kanal,uv1); %Utskriving av paadrag til IO-kortet
rg(k,1)=rp(k,1)*Kmpg+T0; %Omregning til enhet grader (for plotting)
yg(k,1)=yp(k,1)*Kmpg+T0; %Omregning til enhet grader (for plotting)
%Setter linjeobjekter. Soerger for plotting paa skjerm.
set(lhr,'xdata',[t(k-1,1) t(k,1)],'ydata',[rg(k-1,1) rg(k,1)])
set(lhy,'xdata',[t(k-1,1) t(k,1)],'ydata',[yg(k-1,1) yg(k,1)])
set(lhu,'xdata',[t(k-1,1) t(k,1)],'ydata',[u(k-1,1) u(k,1)])
drawnow
end; %For-loekka slutt

ut42(1,uv1); %Setter utgangssignalet tilbake til en rimelig verdi.
etime(clock,t1) %Returnerer tiden fra kallet t1=clock. Gir eksperimentets varighet.

```

B Regulatoralgoritme og -parametre for PID-IT

Pid_reg2.cfu

```
int PID_regulator(int P_verdi, int I_verdi, int D_verdi)
/* ***** */
{
  int      da_paadrag;
  float    avvik;
  float    referanse;
  float    prosess_verdi;
  float    p_param;
  float    i_param;
  float    d_param;
  float    paadrag_rad;
  float    korr_paadrag_rad;
  float    pa_red;

  /* Gj>r PID-parameterene og sett-verdi om fra integer til float */
  p_param = (float) P_verdi/10.0;
  i_param = (float) I_verdi;
  d_param = (float) D_verdi;

  /* Gj>r om sett- og prosessverdi fra grader til prosent av FSO.*/
  prosess_verdi = (float) PR_verdi/650 * 100;
  referanse     = (float) SE_verdi/650 * 100;

  /* Beregner reguleringsavviket i prosent. */
  avvik = referanse - prosess_verdi;

  /* Beregner p&tdraget. */
  paadrag = ( gammelt_paadrag + p_param*avvik*(1+aktiv_i*T_verdi/i_param)
             - p_param * gammelt1_avvik
             + p_param * d_param/T_verdi*(avvik-2*gammelt1_avvik+gammelt2_avvik));

  /* Tar hensyn til integratorbegrensing, max p&tdrag = 0xffff */

  if(paadrag >= 100.0)
    paadrag = 99.99;
  if(paadrag < 0.0)
    paadrag = 0.0;

  /* Gj>re klar til neste sampling. */
  gammelt_paadrag = paadrag;
  gammelt2_avvik  = gammelt1_avvik;
  gammelt1_avvik  = avvik;

  /* if(vent_med_regulering) paadrag = 0;
  da_paadrag = (int) (paadrag_aktiv * paadrag * 0x0ccc/100) + 0x333;
  return skriv_til_da(da_paadrag);
  */
}
```

New Text Document.txt

Divideres med 10

```
const unsigned parx[] = {480,130,31, 300,130,31, 300,130,31,
/* 125-200*/ 300,130,31, 240,115,28, 240,115,28,
/* 201-275*/ 240,115,28, 240,115,28, 240,110,26,
/* 276-350*/ 240,110,26, 240,110,26, 240,110,26,
/* 351-425*/ 240,108,26, 210, 47,11, 210, 47,11,
/* 426-500*/ 210, 47,11, 210, 48,11, 210, 48,11,
/* 501-575*/ 210, 48,11, 210, 48,11, 210, 48,11,
/* 576-650*/ 210, 48,11, 210, 48,11, 210, 52,12};
```

Referanser

- [1] Finn Haugen, *Regulering av dynamiske systemer, bind 1*, Tapir forlag 1994.
- [2] Finn Haugen, *Regulering av dynamiske systemer, bind 2*, Tapir forlag 1996.